

N° d'ordre :

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir

LE TITRE D'INGÉNIEUR-DOCTEUR

par

M. Léon GUILLET fils

Ingénieur des Arts et Manufactures

1^{re} Thèse :

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE
DU MODULE D'ÉLASTICITÉ
DES ALLIAGES MÉTALLIQUES

2^e Thèse :

PROPOSITIONS
DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le

devant la Commission d'examen

M. PASCAL, Président.

MM. H. BÉGHIN }
VILLEY } Examinateurs.



Disp. Soutenance

I. M. 16 Sept. 1939

Éditions de la REVUE DE MÉTALLURGIE
5, Cité Pigalle, PARIS (IX*)

1939

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen honoraire M. MOLLIARD.

Doyen C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du Globe.

Professeurs honoraire

H. LEBESQUE.	LESPIEAU.	Ch. FABRY.
Emile PICARD.	MARCHIS.	Léon BERTRAND.
Léon BRILLOUIN.	VESSIOT.	WINTREBERT.
GUILLET.	PORTIER.	DUBOSQ.
PÉCHARD.	MOLLIARD.	BOHN.
FREUNDLER.	LAPICQUE.	RABAUD.
AUGER.	G. BERTRAND.	
DANGEARD.	ABRAHAM.	

PROFESSEURS

M. CAULLERY	T	Zoologie (Evolution des êtres organisés).	FOCH	T	Mécanique expérimentale des fluides.
Emile BOREL	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique	PAUTHENIER		Physique (P. C. B.).
Jean PERRIN	T	Chimie physique.	DE BROGLIE	T	Théories physiques.
E. CARTAN	T	Géométrie supérieure.	CHRÉTIEN		Optique appliquée.
A. COTTON	T	Recherches physiques.	P. JOB		Chimie générale.
J. DRACH	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	LABROUSTE		Physique du Globe.
Charles PÉREZ	T	Zoologie.	PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.
M. GUICHARD	T	Analyse et mesures chimiques.	VILLEY		Mécanique physique et expérimentale.
Paul MONTEL	T	Théorie des fonctions et Théorie des transformations.	COMBES	T	Physiologie végétale.
L. BLARINGHEM	T	Botanique.	GARNIER	T	Mathématiques générales.
G. JULIA	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.	PÈRES		Mécanique théorique des fluides.
C. MAUGUIN	T	Minéralogie.	HACKSPILL	T	Chimie minérale.
A. MICHEL-LÉVY	T	Pétrographie.	LAUGIER	T	Physiologie générale.
A. DENJOY	T	Application de l'analyse à la Géométrie.	TOUSSAINT		Technique aéronautique.
L. LUTAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	M. CURIE		Physique (P. C. B.).
Eugène BLOCH	T	Physique.	G. RIBAUD	T	Hautes températures.
G. BRUHAT	T	Physique théorique et Physique céleste.	CHAZY	T	Mécanique rationnelle.
E. DARMOIS	T	Enseignement de Physique	GAULT		Chimie (P. C. B.).
A. DEBIERNE	T	Physique générale et Radioactivité.	CROZE		Recherches physiques.
A. DUFOUR	T	Physique (P. C. B.).	DUPONT	T	Théories chimiques.
L. DUNOYER		Optique appliquée.	LANQUINE	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.
A. GUILLIERMOND	T	Botanique.	VALIRON		Mathématiques générales.
M. JAVILLIER	T	Chimie biologique.	BARRABÉ		Géologie structurale et Géologie appliquée.
ROBERT-LÉVY	T	Physiologie comparée.	MILLOT		Biologie animale (P.C.B.)
F. PICARD		Zoologie (Evolution des êtres organisés).	F. PERRIN		Théories physiques.
Henri VILLAT	T	Mécanique des fluides et applications.	VAVON		Chimie organique.
Ch. JACOB	T	Géologie.	G. DARMOIS		Calcul des probabilités et Physique-Mathématique.
P. PASCAL	T	Chimie générale.	CHATTON	T	Biologie maritime.
M. FRÉCHET	T	Calcul différentiel et Calcul intégral.	AUBEL		Chimie biologique.
E. ESCLANGON	T	Astronomie.	Jacques BOURCART		Géographie physique et Géologie dynamique.
M ^{me} RAMART-LUCAS	T	Chimie organique.	M ^{me} JOLIOT-CURIE		Physique générale et Radioactivité.
H. BÉGHIN	T	Mécanique physique et expérimentale.	PLANTEFOL		Biologie végétale (P.C.B.)
			CABANNES		Enseignement de Physique.
			GRASSÉ		Biologie animale (P.C.B.).
			PRÉVOST		Chimie (P. C. B.).
			BOULIGAND		Mathématiques.
			CHAUDRON		Chimie (P. C. B.).

Secrétaire A. PACAUD.

Secrétaire honoraire D. TOMBECK.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

N° d'ordre :

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir

LE TITRE D'INGÉNIEUR-DOCTEUR

par

M. Léon GUILLET fils

Ingénieur des Arts et Manufactures

1^{re} Thèse :

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE
DU MODULE D'ÉLASTICITÉ
DES ALLIAGES MÉTALLIQUES

2^e Thèse :

PROPOSITIONS
DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le

devant la Commission d'examen

M. PASCAL, Président.

MM. H. BÉGHIN }
VILLEY } Examinateurs.



Éditions de la REVUE DE MÉTALLURGIE
5, Cité Pigalle, PARIS (IX^e)

—
1939



A mon Maître
M. Albert PORTEVIN
Professeur à l'École Centrale
Hommage de respectueuse
reconnaissance.

A mes Parents,

A ma Femme,

A mes Enfants.

Contribution à l'étude du module d'élasticité des alliages métalliques

par M. L. GUILLET Fils

INTRODUCTION

Quand l'ingénieur calcule les diverses parties d'une construction, il s'efforce de donner à chaque élément la possibilité de résister indéfiniment aux efforts statiques et dynamiques prolongés ou répétés qu'il est appelé à supporter. La rupture ne doit jamais se produire, quelle que soit la durée d'application des efforts ou leur nombre de répétitions.

Ce n'est pas tout : la déformation élastique sous charge statique ne peut généralement dépasser une limite raisonnable et s'il s'agit de pièces en mouvement, celles-ci doivent présenter une rigidité convenable pour éviter le fouettement et les résonances. Cette rigidité est caractérisée par le module d'élasticité.

En métallurgie, le module d'élasticité *prend chaque jour une plus grande importance* en raison de l'accroissement continu de la résistance des alliages qui donne aux ingénieurs la possibilité d'alléger au maximum les constructions. En effet, les tentatives faites pour améliorer le module sont restées jusqu'à présent sans résultat. Les aciers à haute résistance ont à peu près le même module

d'élasticité que les aciers courants; on ne peut donc alléger les pièces sans craindre de les rendre trop grêles et insuffisamment rigides. Les alliages légers et ultra-légers ont un module d'élasticité qui, par rapport à celui de l'acier, est sensiblement dans le même rapport que celui des densités, ce qui conduit à une conception relativement massive des organes en alliages légers, de sorte que l'accroissement de la résistance de ces alliages au-dessus de certaines limites est vaine, comme l'avait déjà fait remarquer M. R. de Fleury (2).

« La valeur du module d'élasticité des matériaux dans la construction mécanique moderne, intervient donc aujourd'hui d'une façon aussi impérieuse que la limite apparente d'élasticité ou la résistance pour limiter le coefficient de sécurité des organes ou des ensembles et il est curieux de constater qu'aucun progrès important n'a pu être réalisé pour accroître le module d'élasticité des métaux, soit par addition d'éléments, soit par traitements thermiques ou mécaniques. »

Quel est donc le caractère spécial de ce coefficient?

A l'encontre des autres propriétés mécaniques qui ont fait l'objet d'un nombre considérable de recherches, le module d'élasticité a été relativement peu étudié. En ce qui concerne sa variation dans les alliages métalliques, en fonction de la composition, à température ordinaire, les travaux les plus importants sont ceux de Chévenard et Portevin (6) et de Nishiyama (7). D'après Chévenard et Portevin, le module varie linéairement en fonction de la composition dans les solutions solides situées au voisinage des métaux purs.

S'il est vrai que les solutions solides constituent le plus grand nombre des alliages industriels, il est néanmoins intéressant de connaître les lois de variation du module en dehors de ces solutions et de savoir, en particulier, si les composés définis intermétalliques échappent à la loi linéaire. C'est

ce que nous nous sommes proposés de rechercher pour quelques alliages de cuivre particulièrement intéressants en raison des types de structure très variés qu'ils présentent suivant leur composition chimique. Pour reprendre la question dans son ensemble, nous avons déterminé également les modules des principaux métaux purs et des solutions solides situées au voisinage des métaux purs afin de connaître les lois de variations du module dans toute l'étendue de ces alliages.

Enfin, l'influence des traitements thermiques sur le module d'élasticité n'est connu que par quelques résultats dispersés sur les alliages industriels. Nous avons repris son étude d'une façon plus systématique.

Nous avons donc adopté le plan suivant :

I. — Méthodes de mesure employées dans cette étude pour la mesure du module d'élasticité.

II. — Structure cristalline des métaux et alliages métalliques. Nature des forces de liaison.

III. — Module d'élasticité des métaux purs.

IV. — Module d'élasticité des solutions solides situées au voisinage des métaux purs.

V. — Module d'élasticité des composés intermétalliques.

VI. — Module d'élasticité des alliages formés de deux constituants.

VII. — Influence des traitements thermiques sur le module d'élasticité.

Cette étude a été poursuivie dans les laboratoires de l'Ecole Centrale; elle n'a pu être faite que grâce à une nouvelle méthode de mesure, mise au point par MM. Le Rolland et Sorin (5). Les méthodes employées avant les importants travaux de ces auteurs nécessitaient, en effet, des éprouvettes de dimensions importantes irréalisables pour les composés définis intermétalliques qui sont diffi-

ciles à couler en raison de la grande quantité de gaz qu'ils absorbent à l'état liquide et difficiles à usiner en raison de leur grande fragilité. Nous remercions tout particulièrement MM. Le Rolland et Sorin de l'aide si précieuse qu'ils ont bien voulu nous donner dans ces recherches en mettant à notre disposition un appareil de mesure parfaitement fidèle et précis.

Nous tenons également à exprimer notre profonde reconnaissance à M. Albert Portevin, Professeur à l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures, qui a bien voulu diriger de très près cette étude et à M. Jean Galibourg, Maître de Conférences à l'Ecole Centrale, qui a bien voulu nous faire profiter de son expérience et nous conseiller dans l'emploi des élasticimètres avec lesquels nous avons étalonné l'appareil Le Rolland-Sorin. Enfin, nous adressons nos remerciements à la Société Métallurgique de La Bonneville, à la Société Alais, Froges et Camargue, aux Etablissements Marret-Bonnin et à la Société des Cendres à qui nous avons eu recours pour l'élaboration des alliages étudiés.

CHAPITRE PREMIER

Méthodes employées dans cette étude pour la mesure du moule d'élasticité.

Par définition, le module d'élasticité est le rapport entre l'accroissement de l'effort auquel on soumet une pièce et la variation de dimension de la pièce. Mais en réalité, il existe autant de modules que de modes de sollicitations : traction, compression, flexion, torsion. Nous limiterons cependant notre exposé au module d'élasticité à la traction et à la flexion comme étant les seuls que nous ayons étudiés.

Soumettons une éprouvette cylindrique à température constante à un effort de traction croissant dirigé suivant son axe et considérons la courbe dont les ordonnées représentent les efforts par millimètre carré $\frac{F}{S}$ et les abscisses les allongements unitaires $\frac{l}{L}$ (L longueur initiale de l'éprouvette, L+l longueur sous l'effort F). On définit généralement le module de Young en un point du plan comme le rapport :

$$E = \frac{\frac{\Delta F}{S}}{\frac{\Delta l}{L}}$$

ΔF étant une variation très petite de l'effort et Δl la variation de longueur qui s'ensuit. Cette définition n'a de sens que si Δl est une déformation *élastique*, c'est-à-dire réversible. Pour certains métaux ou alliages laminés et recuits, tels que les aciers, les bronzes, etc., tant que l'effort reste inférieur à une certaine valeur, les déformations sont élastiques (du moins à la sensibilité de

nos moyens de mesure) et l'expérience montre que ces déformations élastiques sont proportionnelles aux charges. De l'origine des coordonnées à un point A, la courbe peut être confondue avec une droite. Le module de Young est alors la pente de cette droite. En soumettant l'éprouvette à des charges alternativement croissantes et décroissantes, on décrit des droites parallèles et réversibles indépendantes de la vitesse de traction (fig. 1).

Pour d'autres matériaux, au contraire, même si l'effort de traction reste faible, les déformations

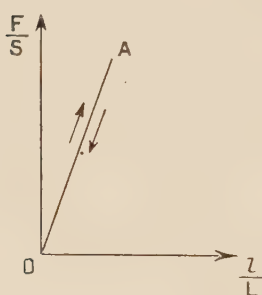


Fig. 1. — Cycle réversible.

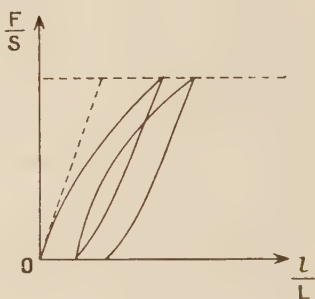


Fig. 2 — Cycle avec hystérésis.

élastiques sont accompagnées de déformations permanentes et subpermanentes; les courbes de traction ne se superposent pas à l'aller et au retour, mais forment un cycle ouvert qui dépend de la vitesse de traction (fig. 2). C'est le cas de la fonte, du cuivre recuit, des aciers écrouis non vieillis, etc. Dans ce cas, il serait inexact de définir le module de Young en un point comme la pente de la tangente à la courbe de traction en ce point.

Certains auteurs ont proposé de prendre comme module la pente de la tangente à la courbe de retour, car, disaient-ils, les déformations permanentes étant acquises, les déformations élastiques entreraient seules en jeu dans la détente.

Pour la plupart des matériaux de construction, en faisant subir à l'effort une loi de variation définie et périodique par rapport au temps, les courbes de déformation se fixent progressivement sur un cycle qui se ferme et devient immuable. En particulier, si l'on effectue des petits cycles de traction autour d'un point déterminé, ces cycles sont, en première approximation, rectilignes et réversibles et on est ramené au premier cas. On dit qu'il y a « accommodation ».

On voit que la définition du module ne peut être précisée qu'après une minutieuse analyse des courbes de déformation. De telles analyses expliqueraient sans doute les contradictions apparentes que l'on trouve dans la littérature pour le module de certains éléments comme le zinc, l'or, l'étain, etc...

Mesure directe.

La méthode la plus simple consiste à tracer point par point la courbe de traction du métal, en mesurant les allongements provoqués par des efforts de traction croissants appliqués à une éprouvette. Les déformations élastiques étant toujours très faibles, on les amplifie avec des extensomètres à miroirs du type Martens, qui permettent de lire sans difficulté des variations de longueur de l'ordre du micron. Les charges sont mesurées sur une machine Amsler à 30 gr/mm^2 près.

Quelles que soient les difficultés expérimentales, ces mesures directes ont l'avantage sur les mesures indirectes de ne pas mettre en jeu des formules de

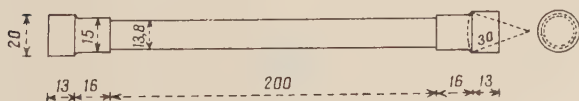
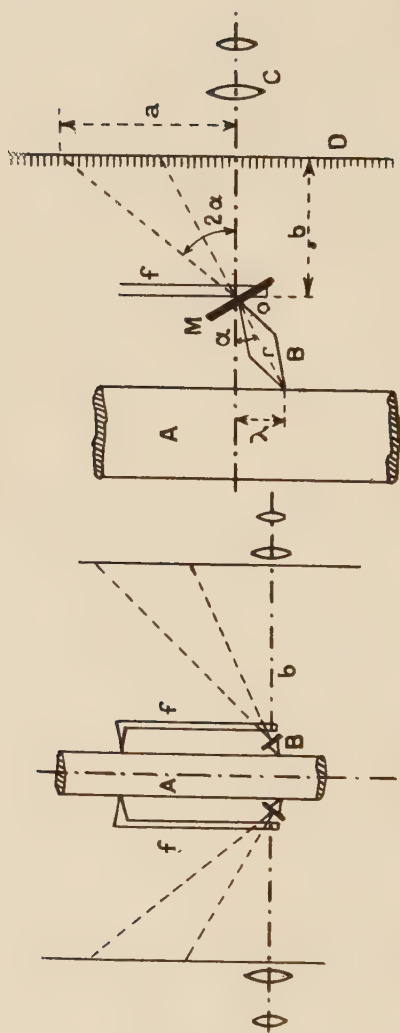


Fig. 3. — Epreuve utilisée pour la mesure du module d'élasticité par traction.



- A Corps de l'éprouvette.
 B Pièce prismatique.
 C Lunette.
 D Règle graduée.
 M Miroir.
 ff Tiges rigides

Fig. 4. — Schéma de l'élastomètre Martens.

résistance de matériaux faisant toujours intervenir des hypothèses ou des simplifications empiriques. La seule hypothèse que l'on fait ici est que les efforts sont uniformément répartis dans toute la section, ce qui est sensiblement réalisé si les dimensions longitudinales de l'éprouvette sont suffisamment grandes par rapport à ses dimensions transversales. La figure 3 représente l'éprouvette



Fig. 5. — Schéma montrant la rotation de l'éprouvette pendant l'essai de traction.

employée : le diamètre de 13 mm. 8 correspond à 150 mm² de section. L'élasticimètre de Martens est représenté (fig. 4). La figure montre que le rapport d'amplification de l'appareil est :

$$n = \frac{a}{\lambda} = \frac{b \operatorname{tg} 2\alpha}{r \sin \alpha} \# \frac{2b}{r}$$

Dans l'appareil employé, $b = 1.041$ mm., $r = 4,164$ mm., de sorte que $n = 500$. Comme on lit facilement le demi-millimètre sur la règle graduée, on voit que l'extensomètre permet de lire des variations de longueur de l'ordre du micron.

La principale difficulté consiste à exercer sur l'éprouvette une traction « pure », c'est-à-dire à

obtenir un allongement à peu près identique sur toutes les génératrices. Toutefois, s'il n'en est pas ainsi, il ne faut pas toujours conclure à une flexion de l'éprouvette. En effet, l'éprouvette est maintenue dans ses mordaches par l'intermédiaire de joints sphériques. Soient a et b les centres de ces sphères (fig. 5). L'équipage de traction de la machine repose, lui aussi, sur un joint sphérique de centre c . Si la machine était parfaitement construite, a , b , c seraient sur une même verticale. Cette condition n'est pas tout à fait réalisée. Ces trois points forment un triangle quand l'éprouvette n'est soumise à aucun effort. Quand on exerce sur l'éprouvette une traction dirigée suivant b , c , celle-ci tourne de l'angle (ab, ac) pour prendre sa position d'équilibre. Il en résulte une rotation égale des deux couteaux porte-miroirs qui vient s'ajouter pour l'un à la rotation provoquée par l'allongement élastique de l'éprouvette et qui s'en retranche pour l'autre. Le résultat final n'est donc pas changé, puisqu'on prend la moyenne des deux lectures pour calculer le module. Cette explication a été parfaitement confirmée par nos expériences en fixant les couteaux porte-miroirs à l'éprouvette de manière qu'ils ne subissent que les déplacements dus à la rotation de celle-ci.

Aux fortes charges, le phénomène se complique. Le centre c se déplace, par élasticité, en c' . L'éprouvette tourne de l'angle (ab', ac') pour prendre sa position d'équilibre, c'est-à-dire en sens inverse du sens précédent.

Bien que ces rotations n'aient pas d'influence sur la mesure du module d'élasticité, nous sommes arrivés, après bien des tâtonnements, à déplacer, à l'aide de cales, le joint sphérique b d'une quantité très petite, mais juste suffisante pour l'amener sur la droite ac . Les deux génératrices de l'éprouvette s'allongent alors rigoureusement de la même quantité.

Une autre condition indispensable est la cons-

tance de la température de l'éprouvette pendant la durée de l'essai, sinon les dilatations thermiques s'ajoutent algébriquement aux dilatations élastiques et faussent les résultats. Il est facile de voir que l'erreur commise sur la détermination du module, par suite d'une variation de température pendant l'essai, varie suivant les charges entre lesquelles E est calculé. En effet, la valeur exacte de E est :

$$E = \frac{\frac{\Delta F}{S}}{\frac{\Delta l - \Delta l_{\theta}}{l}}$$

Δl étant la variation de longueur observée pendant l'essai; Δl_{θ} la variation de longueur due à la variation de température.

D'autre part, la correction à apporter varie suivant le métal de l'éprouvette et celui des tiges de l'élasticimètre. On ne peut donc l'évaluer que dans des cas bien déterminés.

Supposons que l'on mesure le module d'un acier entre 0 et 25 kg/mm² avec un élasticimètre dont les tiges en aluminium ont une longueur de 100 mm.

$$E = 20.000 = \frac{25}{\frac{\Delta l}{100}}$$

$$\Delta l = \frac{2.500}{20.000} = 0,125 \text{ mm.}$$

Pour une variation de température de $\pm 1^{\circ}$, la variation de longueur apparente de l'éprouvette est :

$$\pm 100 (\alpha_{Al} - \alpha_a)$$

α_{Al} et α_a étant les coefficients de dilatation respectifs de l'aluminium et de l'acier, c'est-à-dire :

$$0,00233 - 0,00109 = 0,00124$$

On voit qu'elle atteint à peu près 1 % de Δl ; Δl apparent varie entre 0,1237 et 0,1263.

E varie entre $\frac{2500}{0,1237}$ et $\frac{2500}{0,1263}$, c'est-à-dire

entre 20.209 et 19.770, c'est-à-dire de $\pm 1 \%$ environ.

Pour réaliser une température constante, on peut entourer l'éprouvette et l'extensomètre d'une boîte dont l'un des côtés est en verre pour permettre les lectures.

C'est par cette méthode que nous avons déterminé les modules absolus de quelques alliages (cuivre, bronzes, aciers, etc.) qui nous ont servi dans la suite à vérifier l'étalonnage de l'appareil Le Rolland et Sorin. Pour avoir une grande sensibilité, nous avons utilisé un élasticimètre dont les tiges avaient une longueur de 150 mm.

L'éprouvette étant soumise à des efforts croissants et décroissants, avec une vitesse de traction constante, on décrit des cycles rectilignes parallèles d'effort maximum croissant dont la surface est nulle tant que l'effort maximum reste inférieur à une certaine limite. Dans ces conditions, il est possible de définir un module d'élasticité et un seul.

Pour déterminer ce module, on trace la droite moyenne passant entre les points obtenus, on choisit deux points éloignés, situés exactement sur cette droite, soit XY , $X'Y'$ leurs coordonnées; le module sera :

$$E = \frac{Y' - Y}{X' - X}$$

Mesure indirecte.

La mesure indirecte peut être effectuée par flexion, en traçant la courbe efforts-flèche. Cette méthode a l'avantage de donner des déformations plus sensibles que la traction, mais présente quelques inconvénients théoriques. C'est ainsi que l'on confond le module à la compression et le module à la traction en admettant, *a priori*, qu'ils sont égaux. D'autre part, on suppose que le module est le même à un moment donné dans toute la section de l'éprouvette, c'est-à-dire pour des charges variant de 0 dans la fibre neutre, à la charge maxi-

mum atteinte dans la fibre la plus fatiguée. C'est ce que Bouasse (1) avait déjà remarqué en disant que la flexion est une déformation « hétérogène ». Toutefois, si les efforts de flexion restent faibles, ces deux approximations sont légitimes.

Ces méthodes, basées sur l'emploi des extensomètres, sont longues et ingrates, surtout quand il faut « accommoder » la matière avant de définir son module. Elles donnent une précision d'environ 1,5 % quand elles sont appliquées avec beaucoup de soins par des opérateurs exercés.

Méthode pendulaire de MM. Le Rolland et Sorin.

La méthode dynamique présentée, par MM. Le Rolland et Sorin (5) est, au contraire, simple et rapide.

L'éprouvette E cylindrique (fig. 6), faite avec le métal à étudier, est encastrée à sa partie supérieure dans un bâti très rigide et elle est fixée à son extrémité inférieure au plateau rigide A. A ce plateau sont suspendus symétriquement deux pendules *identiques* P_1 et P_2 . P_2 étant au repos, on lance P_1 sous une amplitude quelconque. P_2 se met en mouvement sous l'influence des petits déplacements imprimés à l'éprouvette par P_1 , P_1

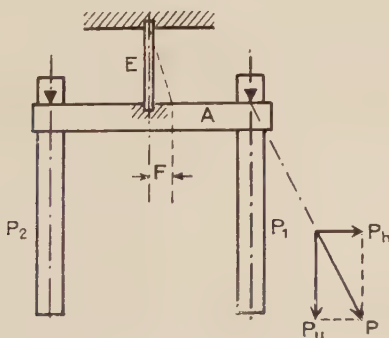


Fig. 6. — Schéma du pendule Le Rolland; premier modèle avec pendules rigides

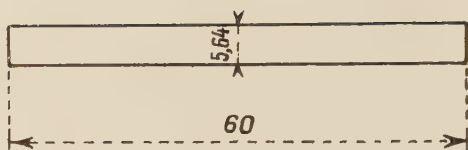


Fig. 7. — Epreuve utilisée pour la mesure du module d'élasticité avec l'appareil Le Rolland-Sorin.

s'amortit et cède son énergie à P_2 . A un moment P_1 s'arrête, tandis que P_2 oscille avec l'amplitude maximum. L'inverse alors se produit et le second pendule restitue au premier l'énergie qu'il en a reçue. Ce phénomène se poursuit aussi longtemps que les frottements n'ont pas amorti l'énergie communiquée au début au premier pendule.

Si τ est le temps qui sépare deux arrêts de l'un des pendules (durée d'un battement), la théorie et l'expérience montrent que $E = A \tau$.

Cette méthode présente de nombreux avantages. Au point de vue théorique, elle réalise les conditions optima ci-dessus exposées pour la définition précise du module : cycles de faible amplitude, accommodation de la matière, etc.

Au point de vue pratique, elle est extrêmement simple. Elle ne nécessite, pour la préparation des éprouvettes, qu'une petite quantité de matière (épreuve cylindrique — fig. 7 — $d = 5 \text{ mm}$, 64, ce qui correspond à 25 mm^2 de section, $l = 60 \text{ mm}$.) et ceci est très important quand la préparation de grandes éprouvettes présente des difficultés spéciales (de fonderie, d'usinage, etc.).

La composante horizontale P_h de la force exercée par le premier pendule sur le plateau A détermine une flexion f de l'éprouvette E qui change de direction avec l'oscillation du pendule. Les formules classiques de la résistance des matériaux donnent :

$$K = \frac{P}{f} = \frac{3EI}{l^3}$$

formule dans laquelle I représente le moment d'inertie de l'éprouvette $\left(\frac{\pi d^4}{64}\right.$ pour une section circulaire), l la longueur de l'éprouvette entre les deux sections encastrées et E le module d'élasticité.

D'après la théorie proposée par MM. Le Rolland et Sorin (5) et que nous ne reprendrons pas ici, la rigidité K est en relation avec la transmission des oscillations des pendules,

$$K = \frac{4 \pi^2 M}{T^4} \left(\frac{\tau}{T} + \frac{\mu}{M} \right)$$

M , étant la masse des pendules,

T , la période des pendules, τ la durée d'un battement et μ la masse équivalente de l'éprouvette.

Lorsque μ est très faible vis-à-vis de M , ce qui est facile à réaliser, on peut écrire :

$$K = \frac{4 \pi^2 M}{T^3} \tau.$$

En associant cette valeur de K à la relation précédente, on obtient :

$$E = \frac{4 \pi^2 M l^3}{3 I T^3} \tau = A \tau$$

A étant une constante qui ne dépend que de l'appareil et des dimensions de l'éprouvette.

Pour une éprouvette cylindrique de diamètre d :

$$A = \frac{4 \pi M l^3}{3 T^3} \cdot \frac{64}{d^4}.$$

Les principales erreurs pouvant intervenir dans la mesure du module d'élasticité, sont les suivantes :

1° sur la longueur encastrée de l'éprouvette. Pour réaliser un encastrement bien précis, il faut opérer avec un serrage constant et bien déterminé. Ceci est obtenu à l'aide d'une clef à débrayage.

2° sur le diamètre de l'éprouvette. Dans tous nos essais, l'usinage était fait au $1/100^e$ mm.; comme le diamètre est de 5 mm. 64, l'erreur relative est de $1/500^e$ mm. environ

3° sur le temps τ . Les arrêts du pendule P_2 se font brusquement et sont, par suite, faciles à déterminer. L'erreur relative sur le temps, inhérente à l'observation de l'arrêt complet du pendule P est toujours comprise entre 0,5 et 1 %, comme l'ont montré de nombreux essais.

$$\text{Or } \frac{\Delta E}{E} = 4 \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta \tau}{\tau}$$

L'erreur relative que l'on commet sur le module est donc comprise entre 1,5 et 2 %. On voit qu'elle

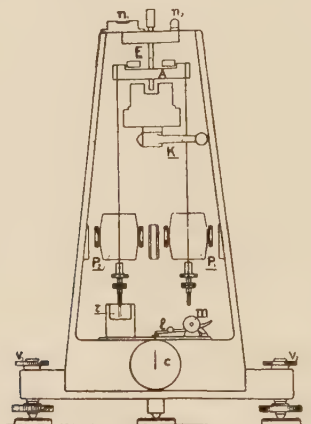


Fig. 8. — Schéma de l'appareil Le Rolland et Sorin.

n'est pas supérieure à celle de la méthode directe. Mais tout défaut physique de l'éprouvette (soufflures, inclusions) agit comme une réduction de la section, et prend dans cette méthode une importance considérable puisque le diamètre de l'éprouvette intervient par sa quatrième puissance dans la formule qui donne le module. Il est donc nécessaire de s'assurer par un examen aux rayons X que les éprouvettes dont on mesure le module sont parfaitement saines.

La figure 8 représente la réalisation la plus pra-

tique de l'appareil. On évite tout frottement en constituant chaque pendule par une masse fixée à la partie inférieure d'une lame d'acier flexible

Tant qu'aucune éprouvette n'a été montée sur l'appareil, le plateau A est soutenu; lorsque l'éprouvette est en place, la manœuvre du levier K permet de libérer le système pendulaire formé par l'éprouvette et le plateau. Il faut alors s'assurer que le pendule P_2 est rigoureusement immobile, au moment où on met en mouvement le pendule P_1 . Ce dernier est maintenu éloigné de la verticale par un petit levier l . En pressant sur un bouton, on efface ce levier qui libère le pendule P_1 et on met en même temps en mouvement le chronomètre C. Le pendule P_2 commence à osciller, son amplitude croît et passe par un maximum puis décroît. Au moment où il s'arrête, moment facile à déterminer avec précision au moyen d'une petite réglette graduée verticale sur laquelle se détache l'extrémité du pendule, on appuie sur un bouton qui arrête le chronomètre : on lit le temps τ .

L'erreur qui peut résulter d'une perte de temps entre l'observation de l'arrêt et le moment où l'on actionne le chronomètre est extrêmement faible. On peut le réduire encore en observant la durée qui s'écoule entre n battements. Comme les frottements sont réduits au maximum, les oscillations des pendules conservent leur période pendant des temps très longs et d'ailleurs la durée d'un battement ne subirait pas de modification (en première approximation) même si la période changeait.

Théorie de l'appareil Le Rolland et Sorin.

La théorie de cet appareil repose sur les beaux travaux de Le Rolland et Sorin (5), elle a été donnée par K. H. Grossmann (5 bis) dans le cas où les pendules sont constitués par des lames d'acier flexibles. Nous la reproduisons ici.

Lorsque deux pendules identiques sont suspen-

dus à un plateau A soutenu lui-même par une petite éprouvette, des oscillations entretenues viennent se superposer aux oscillations naturelles des pendules. Si l'éprouvette était absolument rigide, les deux oscillations n'auraient que leur période propre. Par suite de la flexibilité de l'éprouvette, la fréquence des deux oscillations diffèrent l'une de l'autre d'autant moins que l'éprouvette est plus rigide. La durée des battements est donc d'autant plus grande que le module d'élasticité de l'éprouvette est plus élevé.

Nous allons prouver que le module d'élasticité est proportionnel à la durée des battements, en supposant qu'il ne s'agit que de petits mouvements et que l'on néglige les forces d'inertie des lames, du plateau et de l'éprouvette.

I. — *Ligne élastique des lames formant pendules* (fig. 8 bis).

Elle est donnée par les deux équations différentielles :

$$\mu_1 \frac{d\Psi}{d\eta} = M_n \quad d\xi = \Psi d\eta \quad (1)$$

ξ et η sont les coordonnées telles qu'elles sont portées sur la figure 8 bis, Ψ est l'angle avec l'axe des η de la tangente au point considéré, $\mu_1 = I_1 E_1$ est la rigidité de la lame (I_1 moment d'inertie de la section, E_1 module d'élasticité) M_n moment de flexion à la distance η .

Les forces transmises aux lames par les masses oscillantes peuvent se réduire au point extrême E aux composantes X, Y et à un couple C. Le moment de flexion dans la section η est :

$$M_n = X(l_1 - \eta) - Y(x - \xi) + C$$

et l'on peut remplacer avec une exactitude suffisante Y par le poids G de la masse oscillante.

$$Y = G \quad (2)$$

Il résulte de (1) :

$$\frac{d^2 \Psi}{d\eta^2} = \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\partial M_n}{\partial \eta} + \frac{\partial M_n}{\partial \xi} \cdot \frac{d\xi}{d\eta} \right) = \frac{1}{\mu_1} (-X + G\Psi)$$

$$\Psi = \frac{X}{G} (1 - \operatorname{ch} K\eta) + H \operatorname{sh} K\eta = \frac{d\xi}{d\eta}$$

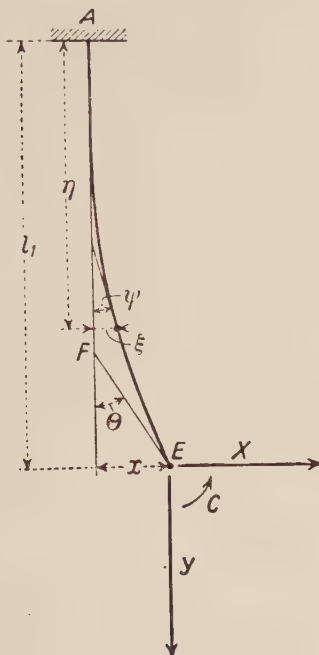


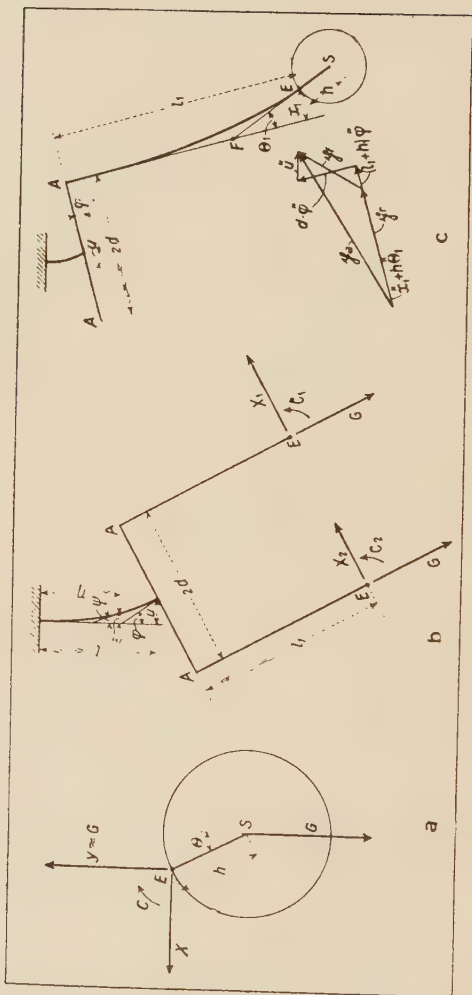
Fig. 8 bis.

H étant une constante

$$K = \sqrt{\frac{G}{\mu_1}}$$

$$\xi = \frac{X}{G} \eta - \frac{X}{KG} \operatorname{sh} K\eta + \frac{H}{K} (\operatorname{ch} K\eta - 1)$$

Pour $\eta = l_1$, on obtient les valeurs Θ et x de Ψ et ξ en fonction de H . Cette constante est déterminée par la condition initiale :



$$\xi = 0 \quad \eta = 0 \quad \mu_1 \frac{d\Psi}{d\eta} = M_n(0,0)$$

c'est-à-dire $\mu_1 K H = l_1 X - Gx + C$

L'élimination de H entre cette équation et les équations $\Theta = f(X, H)$ et $x = g(X, H)$ fournit les relations :

$$X = Bx - D\Theta, \quad C = -Dx + F\Theta \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} NB = GK \, th \, Kl_1, \quad ND = G \left(1 - \frac{1}{ch \, Kl_1} \right), \\ F = \frac{G}{K} (Kl_1 - th \, Kl_1) \\ N = Kl_1 \, th \, Kl_1 - 2 \left(1 - \frac{1}{ch \, Kl_1} \right), \quad \mu_1 K^2 = G \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

II. — Oscillations naturelles des pendules élastiques.

Elles sont données par l'équation différentielle :

$$Xh - Yh\Theta - C = m\rho^2 \frac{d^2(\cdot)}{dt^2} \quad (5)$$

qui se rapporte au mouvement de la masse oscillante m autour de son centre de gravité (fig. 9a), ρ étant le rayon de giration, et par l'équation :

$$-X = m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} + h \frac{d^2 \Theta}{dt^2} \right) \quad (6)$$

qui définit le mouvement du centre de gravité S de la masse oscillante.

En tenant compte des relations (2) et (3), ces équations deviennent :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{B}{m} x + h \frac{d^2 \Theta}{dt^2} - \frac{D}{m} \Theta = 0 \quad (7)$$

$$- \frac{D + hB}{m\rho^2} x + \frac{d^2 \Theta}{dt^2} + \frac{F + h(D + G)}{m\rho^2} \Theta = 0 \quad (8)$$

Les solutions de ces deux équations différentielles sont deux oscillations harmoniques de périodes très différentes dont la plus rapide s'amortit très vite, il ne reste que la plus lente :

$$\Theta = \Theta_0 \cos \omega t; \quad x = \lambda \Theta \quad (9)$$

Pour ce mouvement, le point d'intersection F de la tangente à l'extrémité E avec la verticale passant par le point de suspension est un point

fixe (fig. 1). Sa distance λ à l'extrémité E de la lame est déterminé par ω . Si l'on abandonne le pendule à son mouvement à partir d'une position initiale pour laquelle la tangente à l'extrémité passe par le point F, l'oscillation qui a la fréquence la plus élevée ne se produit pas et le pendule se meut uniquement selon l'équation (9).

III. — Flexion de l'éprouvette.

Elle se déduit, à chaque instant, d'une équation analogue à l'équation (1) dans laquelle les moments des forces transmises aux lames élastiques par les masses oscillantes sont données par figure (9b) :

$$M_n = (X_1 + X_2) (l_1 + l - \eta) + C_1 + C_2$$

Par intégration, on trouve les valeurs finales φ et u pour $\eta=l$ de Ψ et ξ :

$$\frac{\mu}{l} \varphi = (X_1 + X_2) \left(l_1 + \frac{l}{2} \right) + C_1 + C_2$$

$$\frac{2\mu}{l^2} u = (X_1 + X_2) \left(l_1 + \frac{2}{3} l \right) + C_1 + C_2$$

Mais, d'après les relations (3) X_1 et C_1 s'expriment linéairement en fonction de Θ_1 et x_1 , et de même X_2 et C_2 s'expriment linéairement en fonction de Θ_2 et x_2 . Il en résulte que φ et u sont des fonctions linéaires de ces deux grandeurs et l'on a :

$$\alpha = \Theta_1 + \Theta_2; z = x_1 + x_2 \quad (10)$$

$$\varphi = Qz + R\alpha; u = Hz + K\alpha \quad (11)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} Nl_1 Q &= \left[\left(l_1 + \frac{l}{2} \right) K th Kl_1 - \left(1 - \frac{1}{ch Kl_1} \right) \right] \chi \\ NR &= \left[1 - \frac{th Kl_1}{Kl_1} - \left(1 + \frac{1}{2l_1} \right) \left(1 - \frac{ch Kl_1}{1} \right) \right] \chi \\ NH &= \frac{l}{2l_1} \left[\left(l_1 + \frac{2}{3} l \right) K th Kl_1 - \left(1 - \frac{1}{ch Kl_1} \right) \right] \chi \\ NK &= \frac{l}{2l_1} \left[l_1 - \frac{th Kl_1}{K} - \left(l_1 + \frac{2}{3} l \right) \left(1 - \frac{1}{ch Kl_1} \right) \right] \chi \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{avec } N &= K \operatorname{th} K l_1 - 2 \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} K l_1} \right) \\ \chi &= \frac{G l_1 l}{\mu} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Dans la pratique $K l_1 = \sqrt{\frac{G}{\mu}} l_1$ est de l'ordre de grandeur de 1. Comme l'éprouvette est supposée rigide et courte, il s'ensuit que χ est négligeable vis-à-vis de 1, ce qui entraîne la petitesse des grandeurs exprimées par les équations (12).

$$|H| \ll 1, |R| \ll 1, |K| \ll l_1, |Q| \ll \frac{1}{l_1} \quad (14)$$

Comme z et $l_1 \alpha$ sont du même ordre de grandeur, on a également :

$$|\varphi| \ll |\alpha|, |u| \ll |z| \quad (15)$$

IV. — Pendules sympathiques.

Le centre de gravité S de la masse oscillante m du pendule de droite, par exemple, se meut suivant la relation :

$$R = m \gamma_a \quad (16)$$

La force R est la résultante du poids G_1 , de la masse oscillante et de la force exercée sur celle-ci par la lame flexible dont les composantes sont $-X_1$ et $-Y_1$ (fig. 9); γ_a est l'accélération absolue du point S .

Il est facile de décrire le mouvement relatif de S par rapport à la pièce de liaison AA (fig. 9c), car l'accélération relative est parallèle à cette pièce. Le mouvement d'entraînement de AA peut se décomposer en une translation horizontale de vitesse $\frac{du}{dt} = u'$ et une rotation autour de son centre de vitesse angulaire φ' .

$$\gamma_a = \gamma_r + \gamma_f + \gamma_c$$

γ_f est l'accélération d'entraînement, γ_c l'accélération de Coriolis. Comme on néglige les produits des petites élongations des vitesses et des accélérations, γ_c disparaît. De γ_f , il reste uniquement les trois composantes portées sur la fig. 4. En proje-

tant l'équation (16) sur l'axe AA et sur l'axe perpendiculaire, on obtient :

$$X_1 - G_1 \varphi = m \left[\frac{d^2 x_1}{dt^2} + h \frac{d^2 \Theta_1}{dt^2} + \frac{d^2 u}{dt^2} + (l_1 + h) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right] \quad (17)$$

$$\text{et} \quad -Y_1 + G = -m \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \quad (18)$$

Si l'on écrit de même les équations relatives au pendule de gauche et si l'on se rappelle les relations (3), on retombe sur l'équation 7 dans laquelle les quantités de Θ et x sont remplacées par les différences :

$$\beta = \Theta_1 - \Theta_2; \quad w = x_1 - x_2 \quad (19)$$

D'autre part, l'équation des moments appliquée au point S donne :

$$-C_1 - G h \Theta_1 + X_1 h = m \rho^2 \left(\frac{d^2 \Theta_1}{dt^2} + \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right). \quad (20)$$

La recherche de l'équation analogue pour le pendule de gauche, en tenant compte des relations (3) conduit à l'équation 8 en remplaçant Θ par β et x par w , β et w sont donc des oscillations harmoniques de pulsation naturelle ω et de la forme (9). Si on additionne les équations ainsi obtenues avec (17) et (20), on obtient deux équations différentielles :

$$(1 + \varepsilon_1) \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{B + \varepsilon_2}{m} z + (h + \varepsilon_3) \frac{d^2 \alpha}{dt^2} - \frac{D + \varepsilon_4}{m} \alpha = 0 \quad (21)$$

$$\varepsilon_5 \frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{D + h B}{m \rho^2} z + (1 + \varepsilon_6) \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{F + h (D + G)}{m \rho^2} \alpha = 0 \quad (22)$$

$$\text{avec :} \quad \left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= 2 [H + (l_1 + h) Q], & \varepsilon_2 &= 2 G Q \\ \varepsilon_3 &= 2 [K + (l_1 + h) R], & \varepsilon_4 &= -2 G R \\ \varepsilon_5 &= 2 Q, & \varepsilon_6 &= 2 R \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

h est du même ordre de grandeur que l_1 et $\frac{1}{l_1}$ du même ordre de grandeur que h , de sorte que, en tenant compte de (4) et de (14), on peut écrire :

$$\left. \begin{aligned} |\varepsilon_1| &\ll 1, & |\varepsilon_2| &\ll B, & |\varepsilon_3| &\ll h, \\ |\varepsilon_4| &\ll D, & |\varepsilon_5| &\ll \frac{1}{l_1}, & |\varepsilon_6| &\ll 1, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Les équations différentielles (21) et (22) qui donnent z et α ne diffèrent donc que très peu de (7) et (8) qui donnent w et β , z et α se composeront donc aussi d'une oscillation rapide qui s'éteindra rapidement et d'une autre plus lente de la forme :

$$\alpha = \alpha_0 \cos \omega_1 t; \quad z = \lambda_1 \alpha \quad (25)$$

De même que l'on peut déduire la pulsation naturelle ω de l'équation caractéristique tirée de (7) et (8) et mise sous forme de déterminant :

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + \frac{B}{m}, & -h\omega^2 - \frac{D}{m} \\ -\frac{D+hB}{m\rho^2}, & -\omega^2 + \frac{F+h(D+G)}{m\rho^2} \end{vmatrix} = 0$$

ou en abrégeant : $a\omega^4 + b\omega^2 + c = 0$.

On peut aussi déduire la pulsation « forcée » ω_1 de l'équation suivante tirée de (21) et (22) :

$$\begin{vmatrix} -\omega_1^2 (1 + \varepsilon_1) + \frac{B + \varepsilon_2}{m}, & -\omega_1^2 (h + \varepsilon_3) - \frac{D + \varepsilon_4}{m} \\ -\omega_1^2 \varepsilon_5 - \frac{D + hB}{m\rho^2}, & -\omega_1^2 (1 + \varepsilon_6) + \frac{F + h(D + G)}{m\rho^2} \end{vmatrix} = 0$$

ou en abrégeant : $a_1\omega_1^4 + b_1\omega_1^2 + c_1 = 0$. (26)

ω et ω_1 sont, d'après les équations précédentes, des fonctions des coefficients a , b , c .

$$\omega = f(a, b, c); \quad \omega_1 = f_1(a_1, b_1, c_1).$$

On peut écrire, en première approximation, d'après la formule de Taylor :

$$\omega_1 - \omega = f_a(a_1 - a) + f'_b(b_1 - b) + f'_c(c_1 - c). \quad (27)$$

f'_a étant la valeur de la dérivée partielle par rapport à a_1 de la fonction $f(a_1, b_1, c_1)$ pour $a_1 = a$.

Comme a , b , c , sont des combinaisons de diverses grandeurs qui se rapportent uniquement au pendule, cela reste vrai pour f'_a , f'_b et f'_c . Donc, si l'on néglige les infiniments petits du second ordre, $a_1 - a$ sera une expression linéaire et homogène de ε_1 à ε_6 .

$$a_1 - a = \Sigma l_i \varepsilon_i$$

dans laquelle les coefficients l_i ne dépendent de nouveau que des constantes du pendule. On peut en dire autant de $b_1 - b$ et de $c_1 - c$.

En introduisant dans l'expression 27 les valeurs des E_i tirées de (23) (12) et (13), on obtient :

$$\omega - \omega_1 = \frac{P}{\mu} \quad (28)$$

dans laquelle l'expression abrégée p dépend non seulement des dimensions du pendule, mais de la longueur de l'éprouvette.

V. — *Equilibre forcé.*

Si l'on déplace de sa position d'équilibre naturel la masse du pendule de droite à la main et qu'on la porte dans la position Θ_1, x_1 , il est intéressant de chercher quelles sont les coordonnées correspondantes du pendule de gauche abandonné à lui-même.

L'accélération disparaît des équations (17) et (20) et on obtient :

$$X_2 = -G\varphi, \quad C_2 = -Gh(\Theta_2 + \varphi)$$

valeurs qui portées dans (3) donnent deux expressions linéaires entre x_2, Θ_2 et φ d'où l'on tire :

$$\begin{aligned} \Theta_2 &= - \frac{1 - \frac{1}{\text{ch} K l_1} + h K \text{th} K l_1}{1 + K h \text{th} K l_1} \varphi \\ x_2 &= - \frac{1 - \frac{\text{th} K l_1}{K l_1} + \frac{h}{l_1} (K l_1 \text{th} K l_1 + \frac{1}{\text{ch} K l_1})}{1 + K h \text{th} K l_1} l_1 \varphi \end{aligned}$$

En raison de l'équation (15), on a donc :

$$|\Theta_2| \ll \alpha, \quad |x_2| \ll l_1, \quad \alpha \ll z$$

et par suite :

$$|\Theta_2| \ll |\Theta_1|, \quad |x_2| \ll |x_1|$$

En première approximation, le fait de déplacer l'un des pendules de sa position d'équilibre naturel ne provoque aucune modification de l'autre pendule.

VI. — *Battements.*

Comme ω_1 diffère très peu de ω , λ et λ_1 sont très voisins l'un de l'autre

$$\lambda_1 \approx \lambda \quad (29)$$

Déplaçons le pendule de droite de façon que le point d'intersection F de la tangente à l'extrémité avec la verticale passant par le point de suspension A soit à la distance λ du point E. De cette position de repos pour laquelle $x_1 = x_0$, $\Theta_1 = \frac{x_0}{\lambda}$, $\Theta_2 = x_2 = 0$, on abandonnera le système au temps $t = 0$ en libérant le pendule. D'après les équations (10) et (19)

$$x_1 = \frac{z+w}{2}, x_2 = \frac{z-w}{2}, \Theta_1 = \frac{\alpha+\beta}{2}, \Theta_2 = \frac{\alpha-\beta}{2}, \quad (30)$$

pour $t = 0$, puisque l'on a :

$$0 = \frac{dz}{dt} + \frac{dw}{dt} = \frac{dz}{dt} - \frac{dw}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\beta}{dt}$$

on a

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\beta}{dt} = \frac{dz}{dt} = \frac{dw}{dt} = 0 \text{ et } \alpha = \beta = \frac{x_0}{\lambda}, z = w = x_0$$

Or, d'après (9), $w = x_0 \cos \omega t$, $\beta = \frac{w}{\lambda}$ sera une oscillation possible et si l'on tient compte de (29), on aura aussi d'après (25) :

$$z = x_0 \cos \omega_1 t, \alpha = \frac{z}{\lambda}.$$

Comme ces oscillations satisfont aux conditions à l'origine, elles expriment en première approximation le mouvement qui se produit réellement dans les conditions indiquées. On aura donc, suivant (30) :

$$x_1 = \frac{x_0}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega t) = x_0 \cos \frac{\omega - \omega_1}{2} t \cos \frac{\omega + \omega_1}{2} t$$

$$x_2 = \frac{x_0}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega t) = x_0 \sin \frac{\omega - \omega_1}{2} t \sin \frac{\omega + \omega_1}{2} t$$

La figure 10 indique, suivant le mode généralement employé, les phénomènes. Le vecteur $\vec{OA}$ de valeurs $\frac{x_0}{2}$ tourne avec la vitesse angulaire ω_1 autour de O et le vecteur $\vec{AB}$ de même longueur tourne avec la vitesse angulaire ω autour de A. Au temps $t=0$, les deux vecteurs ayant la même direction sont confondus avec la droite OX; x_1 est

la projection sur OX du vecteur résultant OB dont la valeur est $x_0 \cos \frac{\omega - \omega_1}{2} t$, x_2 celle du vecteur OC de valeur $x_0 \sin \frac{\omega - \omega_1}{2} t$. Comme la vitesse relative de rotation $\omega - \omega_1$ du deuxième vecteur par rapport au premier est faible, les triangles OAB et OAC ne changent que très lentement de

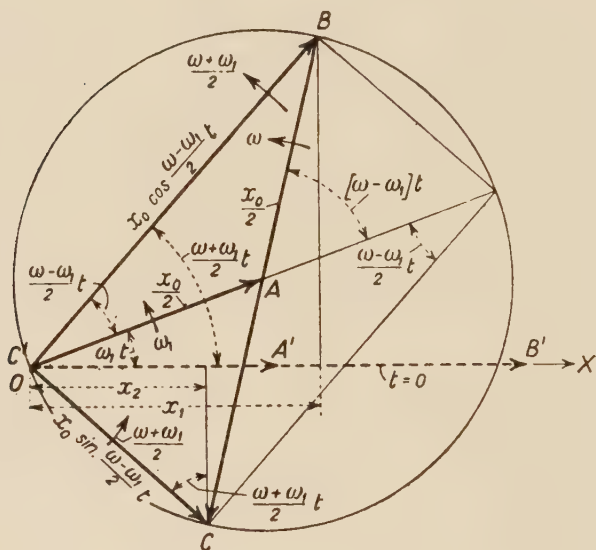


Fig. 10.

forme pendant que leur côté commun tourne autour de O avec la vitesse ω_1 : x_1 et x_2 sont pour ainsi dire des oscillations harmoniques de pulsation $\frac{\omega + \omega_1}{2}$ dont les amplitudes maxima sont variables : l'amplitude de l'un diminue tandis que celle de l'autre augmente. Au moment où l'une s'annule, l'autre atteint sa valeur maxima et inversement. Le temps τ qui s'écoule entre deux

amplitudes successives nulles caractérise la durée d'un battement. En d'autres termes, τ est le temps que le vecteur tournant AB met à faire un

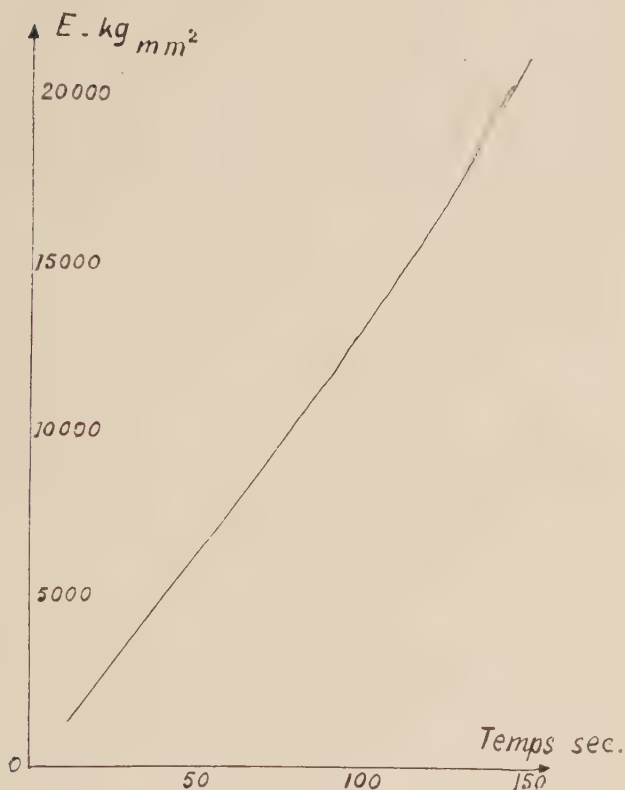


Fig. 11. — Courbe d'étalonnage de l'appareil Le Rolland et Sorin.

tour complet à la vitesse relative $\omega - \omega_1$ par rapport au vecteur OA entre deux coïncidences de B avec O :

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega - \omega_1}$$

Si on provoque de la même façon les oscillations des pendules avec deux éprouvettes de métaux différents mais de mêmes dimensions, par suite de l'équation (28), les durées des battements seront entre elles comme les rigidités des éprouvettes ou comme leurs modules d'élasticité.

La droite représentant cette loi se détermine en faisant des expériences avec des métaux dont le module est connu (fig. 11). Nous avons employé l'aluminium, le cuivre, le platine et un acier doux.

CHAPITRE II

STRUCTURE CRISTALLINE DES MÉTAUX ET ALLIAGES MÉTALLIQUES. — NATURE DES FORCES DE LIAISON.

L'analyse de la structure d'un cristal au moyen des rayons X montre qu'il est formé d'un arrangement régulier de particules matérielles occupant dans l'espace des positions bien déterminées. Ces particules sont liées les unes aux autres par des forces appelées *forces de liaison* qui assurent la cohésion du cristal.

La nature de ces forces est encore mal connue. On les attribue aux électrons de valence, c'est-à-dire aux électrons des couches périphériques des atomes.

Les structures des métaux vrais sont, en général, simples et on peut les représenter par des empilements de sphères en contact les unes avec les autres. Parmi le grand nombre d'assemblages possibles, il en est qui forment la quasi totalité des métaux, ce sont les assemblages compacts (cubique et hexagonal) et celui de cubes centrés qui est presque compact.

En ce qui concerne les forces de liaison, on sait qu'on a été amené à imaginer, pour expliquer les propriétés de l'état métallique, notamment la conductibilité, la présence d'électrons libres et mobiles formant un gaz électromique à très forte concentration. Cette hypothèse repose sur quelques considérations relatives à la structure atomique que nous allons rappeler brièvement.

Dans les combinaisons ou associations d'atomes, celles qui se produisent naturellement correspondent à l'arrangement le plus stable entre électrons et atomes. Or, les éléments reconnus les plus stables sont les gaz rares et l'on sait que la couche

externe de l'atome de tous ces éléments comporte huit électrons. Si on admet, pour la structure des corps solides en général, par analogie avec les gaz rares, qu'une configuration comprenant huit électrons externes ou électrons de valence est particulièrement stable, cette configuration appelée octet peut se réaliser suivant trois types principaux d'associations d'atomes :

1° Un atome se dépouille complètement de ses électrons externes au profit d'un autre; la liaison est dite *hétéropolaire ou d'électrovalence*. Elle est assurée par les forces d'attraction électrostatique qui s'exerce entre les ions ainsi formés qui sont chargés de signes contraires. La formation des octets dans ces sortes de liaisons suppose que le nombre des électrons périphériques présents dans l'ensemble des atomes soit un multiple de 8. Cette condition, réalisée dans un nombre considérable de composés minéraux (NaCl, MgO) ne l'est pas, en général, pour les métaux.

2° Deux atomes mettent en commun une paire d'électrons de la couche externe : la liaison est dite *homopolaire ou de covalence*. Elle oblige les électrons de valence à rester au voisinage immédiat des deux atomes liés et empêche leur mobilité. Pour qu'il y ait formation d'octets, il faut qu'un atome de valence N, possédant N électrons échangeables, puisse mettre en commun un électron avec chacun des 8-N atomes voisins, de façon à compléter sa couche externe à 8 électrons.

Un électron ne pouvant être mis en commun qu'une seule fois, ce mode de liaison entraîne la condition :

$$N \geq 8-N \quad \text{ou} \quad 4 \leq N < 8$$

où N est la valence de l'élément. Cette condition est vérifiée pour un grand nombre d'éléments, en particulier ceux qui ne sont ni des métalloïdes vrais, ni des métaux vrais, tels que As, Sb, Bi, Si.

3° Les éléments qui présentent de façon tout à fait marquée les propriétés de l'état métallique ont

moins de 4 électrons sur leurs orbites externes, de sorte qu'aucun arrangement possible ne satisfait à la relation précédente. On admet alors que les électrons ne sont plus astreints à rester liés à deux atomes, mais peuvent évoluer entre plusieurs atomes. Un métal devient ainsi un grand atome à noyaux multiples et à grand nombre d'électrons périphériques. La liaison est dite *métallique*.

Cette liaison exige des structures dans lesquelles les atomes aient un grand nombre d'atomes voisins afin de pouvoir échanger aisément leurs électrons. En effet, comme nous l'avons dit plus haut, les vrais métaux cristallisent tous avec des structures compactes ou presque compactes.

Examinons maintenant la structure des alliages métalliques et prenons pour exemple le cas des laitons, alliages de cuivre et de zinc.

Le diagramme d'équilibre de ces alliages, d'après Broniewski, Jablonski et Maj, est représenté

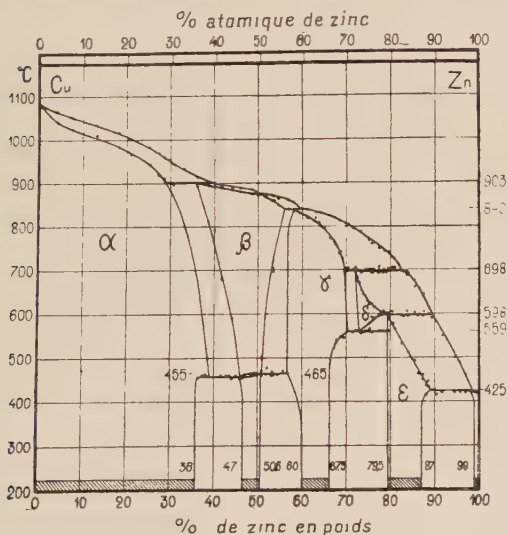


Fig. 12. — Diagramme d'équilibre des alliages cuivre-zinc d'après Broniewski, Jablonski et Maj.

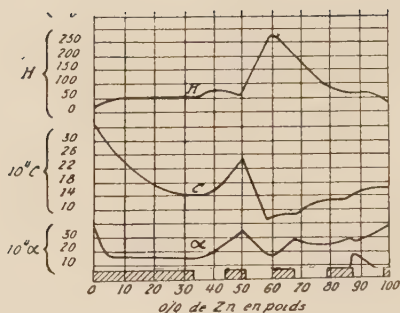


Fig. 13. — Propriétés physiques des alliages cuivre-zinc d'après Broniewski et Hackiewicz. H: dureté Brinell; C: conductivité électrique à 0°; α : coefficient de la résistance électrique entre 0 et 100°

figure 12. Il révèle l'existence d'un certain nombre de domaines α , β , γ , ε , pour lesquels l'examen au microscope montre que l'alliage est homogène, c'est-à-dire ne comprend qu'une seule phase. Dans les régions intermédiaires, le produit formé est hétérogène et constitué par un mélange en proportions variables des deux phases voisines. La figure 13 montre les variations des propriétés physiques de ces alliages en fonction de la composition.

Westgren et Phragmen ont déterminé par l'analyse aux rayons X les structures cristallines des phases α , β , γ , ε . Au delà de la solution solide de zinc dans le cuivre dont la structure est identique à celle du cuivre pur, apparaît la phase β du type cubique centré. Cette phase présente les caractères très marqués de l'état métallique : haute conductibilité électrique, malléabilité, etc., ce qui fait admettre que les liens qui unissent ses différents atomes sont du type métallique. La proportion de zinc pour laquelle on obtient le maximum de ces propriétés correspond à la formule Cu Zn , pour laquelle le rapport du nombre d'électrons de valence au nombre d'atomes est égal à $3/2$. Cette

phase est à rapprocher, au point de vue des propriétés, de la phase ϵ située à l'autre extrémité du diagramme qui cristallise dans le système hexagonal et correspond à la formule Cu Zn^3 , pour laquelle le rapport précédent est voisin de $7/4$.

La phase γ qui correspond à des concentrations en zinc d'environ 60 % en poids, présente des propriétés nettement différentes : elle est très dure, diamagnétique, extrêmement fragile et son apparition entraîne une baisse brutale de la conductibilité électrique. Le caractère métallique de cette phase est donc particulièrement peu marqué : ces liaisons entre atomes γ sont supposées tendre vers le type de covalence. Sa structure cristalline est très compliquée; la maille cubique contient 52 atomes, dont 20 de cuivre et 32 de zinc. Elles correspondent à la formule $\text{Cu}^5 \text{Zn}^8$ pour laquelle le rapport du nombre des électrons au nombre des atomes est de $21/13$.

Les structures types que nous venons d'étudier dans les alliages cuivre-zinc se retrouvent identiques, et avec des propriétés semblables, dans beaucoup d'alliages à température ordinaire. (Exemples : alliages de cuivre, d'argent ou d'or avec le zinc, le cadmium, l'étain, etc.) Hume Rothery a montré, de plus, qu'elles apparaissent, pour les mêmes concentrations en électrons de valence, attirant ainsi l'attention sur le fait que la structure des alliages dépend, non seulement des atomes en présence, mais surtout des systèmes d'électrons de valence associés aux constituants.

CHAPITRE III

MODULE D'ÉLASTICITÉ DES MÉTAUX PURS.

Voici rangés par ordre décroissant, les modules de quelques métaux en km/mm^2 . Nous avons repris la détermination de certains modules dont les valeurs nous paraissaient trop anciennes ou douteuses. Nous avons mesuré également le module du glucinium.

Tableau I.

	Volume atomique	Tempé- rature de fusion °C	E Kg/mm ²
Tungstène	9,6	3660	42.000
Glucinium	4,9	1278	36.000
Fer	7,1	1530	21.000
Nickel.....	6,6	1451	22.000
Platine.....	9,1	1771	16.300
Cuivre	7,1	1083	12.600
Silicium	12,2	1425	9.500
Or	10,2	1063	8.500
Zinc.....	9,2	420	8.000
Argent	10,2	961	7.000
Aluminium	9,9	658	7.300
Magnésium	13,9	651	4.500
Etain.....	16,3	232	4.000
Calcium	26	809	2.000
Plomb	19	327	1.800

Module d'élasticité du glucinium.

Le glucinium dont nous avons mesuré le module contenait quelques impuretés. Voici son analyse : Fe = 0,7 %, Si = 0,6 %, Mg = 0,3 %, Zn = 0,3 %, Mn = 0,2 %, C = 0,05 %.

Il avait été fondu dans un creuset de magnésie, puis les barettes obtenues avaient été passées aux rayons X après immersion dans une solution de chlorure de baryum à 7 gr. pour 100 cmc, pour

s'assurer qu'elles ne contenaient ni soufflures, ni inclusions.

La valeur obtenue pour le module est nettement supérieure à celle qui avait été calculée par M. Portevin, d'après la formule de Fessenden : 30.000 kg/mm^2 . Il n'existait pas, à notre connaissance, de détermination expérimentale antérieure à la nôtre. Ceci s'explique par les grandes difficultés que l'on rencontre dans la fusion et la coulée du glucinium, en raison surtout de sa grande affinité pour l'oxygène. Le haut module du glucinium joint à sa faible densité ($d = 1,85$) est la plus intéressante propriété de ce métal.

Relation entre le module et les constantes chimiques ou physiques d'un métal.

Diverses formules ont été proposées pour relier la valeur du module d'un métal à certaines caractéristiques physiques de ce métal. Telles sont les formules de Herbert Tomlinson (1883), Southermand (1891), Fessenden (1892).

Ce dernier a donné la formule $E = 78 \frac{10^4}{\sqrt{V}}$.

V étant le volume atomique du métal. Cette formule ne répond que d'assez loin à la réalité, car en portant en abscisses les valeurs de $\frac{1}{\sqrt{V}}$ et en ordonnées les valeurs de E, ces points ne s'alignent pas sur une droite, comme le montre la figure 14. En particulier, elle donne des résultats très insuffisants pour les métaux réfractaires à modules élevés, comme le tungstène : (E calculé = 8.000, E mesuré = 42.200), dont le point figuratif ($\frac{10^3}{\sqrt{V}} = 10,85$) sortirait de la figure.

Les divergences entre les valeurs calculées et les valeurs expérimentales sont peut-être dues au fait que l'on compare à tort les modules d'élasticité des éléments à la température ordinaire, température qui est bien arbitraire si l'on songe à la place qu'elle occupe dans l'échelle des tempé-

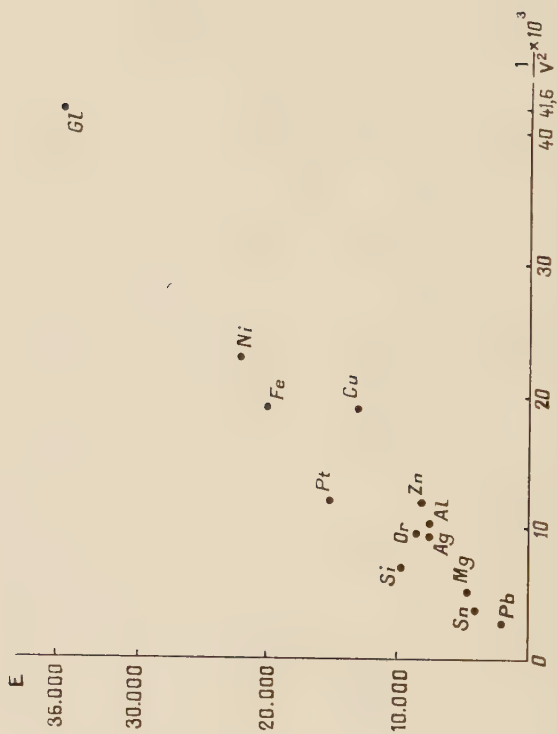


Fig. 14. — Relation entre le module d'élasticité et le volume atomique des métaux.



Fig. 15. — Relation entre le module d'élasticité, le volume atomique et la température de fusion des métaux.

ratures vis-à-vis des points de fusion de ces éléments.

On sait, en effet, que le module d'un métal décroît quand la température augmente, d'autant plus rapidement que l'on se rapproche du point de fusion. Il faudrait donc étudier pour chaque élément ces variations dans une zone très étendue de température pour savoir dans quelles conditions on peut comparer rationnellement les modules aux volumes atomiques.

En comparant sur le tableau I deux éléments de volume atomique sensiblement identique, on constate que leurs modules se classent toujours dans le même ordre que les températures de fusion. C'est le cas du fer et du cuivre, du platine et du zinc, de l'argent et de l'or, de l'aluminium et du tungstène. Si l'on porte, avec M. Portevin (4), comme première approximation les valeurs de $\frac{V_2}{T}$ en abscisses et celles du module en ordonnées, on voit que les points obtenus s'alignent mieux que précédemment (fig. 15).

Cette loi n'a qu'une valeur très relative, elle permet seulement de s'orienter dans la recherche des hauts modules vers les éléments dont le volume atomique est faible ou dont la température de fusion est élevée.

CHAPITRE IV

MODULE D'ÉLASTICITÉ DES SOLUTIONS SOLIDES SITUÉES AU VOISINAGE DES MÉTAUX PURS.

Le tableau II donne les analyses chimiques et les modules d'élasticité des solutions solides cuivre-aluminium, cuivre-zinc et cuivre-étain.

Tableau II.

Cu—Al		Cu—Zn		Cu—Sn	
Compo- sition % en poids	Modules kg/mm ²	Compo- sition % en poids	Modules kg/mm ²	Compo- sition % en poids	Modules kg/mm ²
0 Al	12.600	0 Zn	12.600	0 Sn	12.600
2,05 —	12.260	9,79 —	12.060	1,92 —	12.300
4,72 —	11.920	19,36 —	11.600	3,81 —	12.000
5,80 —	11.750	25,25 —	11.380	6,05 —	11.620
7,90 —	11.650	34,76 —	10.970	8,02 —	11.350
9,87 —	11.350	37,33 —	10.830	9,90 —	10.900

La figure 16 montre les courbes obtenues.

Tous ces alliages ont été laminés. Les températures de laminage ont été de 700° pour les alliages cuivre-aluminium et 600° pour les alliages cuivre-zinc. Les alliages cuivre-étain ont été laminés à froid. Ils ont subi, au laboratoire, un recuit de 20 minutes à 675°.

On voit que l'aluminium, le zinc et l'étain diminuent régulièrement le module d'élasticité du cuivre. Il est intéressant de remarquer que dans le cas de l'aluminium et de l'étain les courbes obtenues sont au-dessous des droites joignant le module du cuivre à chacun de ces deux métaux, alors que les solutions solides cuivre-zinc ont un module qui obéit sensiblement à la loi des mélanges.

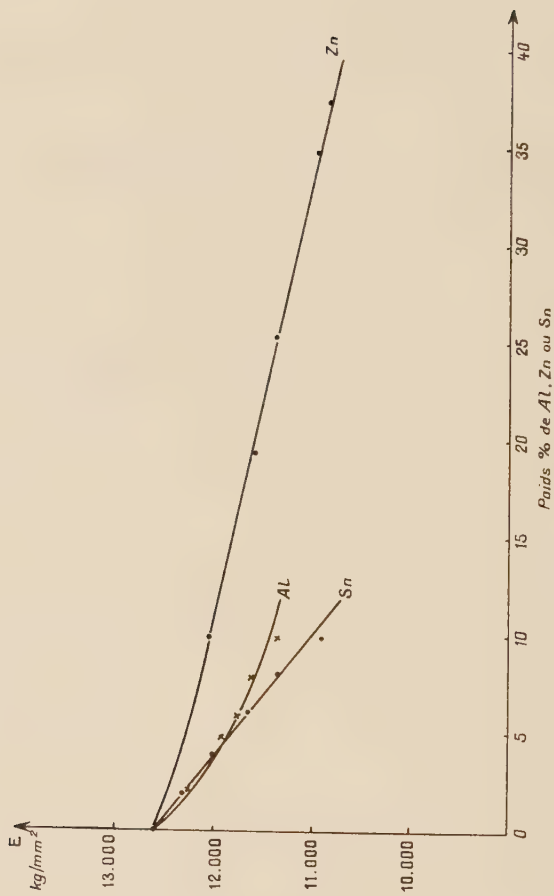


Fig. 16. — Variation du module d'élasticité des solutions solides cuivre-aluminium, cuivre-zinc et cuivre-étain en fonction de la composition.

De plus, alors que le module varie suivant une loi sensiblement linéaire dans les solutions solides Cu-Zn et Cu-Sn, il n'en est plus de même pour les solutions solides Cu-Al. Toutefois, dans ces derniers alliages, les variations du module demeurent linéaire si l'on exprime la concentration en volume (fig. 17) ce qui tient à la grande différence de densité entre le cuivre et l'aluminium. Les densités des alliages cuivre-aluminium ont été prises d'après Frilley (8).

Le tableau III donne les compositions chimiques et les modules d'élasticité des solutions solides platine-iridium et platine-rhodium. Ces alliages ont été laminés et recuits. Les figures 18 et 19 montrent les courbes obtenues. On voit que ces deux éléments augmentent de façon très sensible le module d'élasticité du platine suivant une loi sensiblement

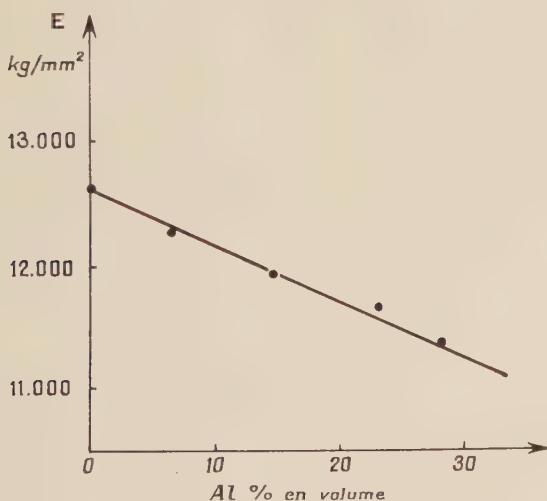


Fig. 17. — Variation du module d'élasticité des solutions solides cuivre-aluminium en fonction de la composition exprimée en volumes.

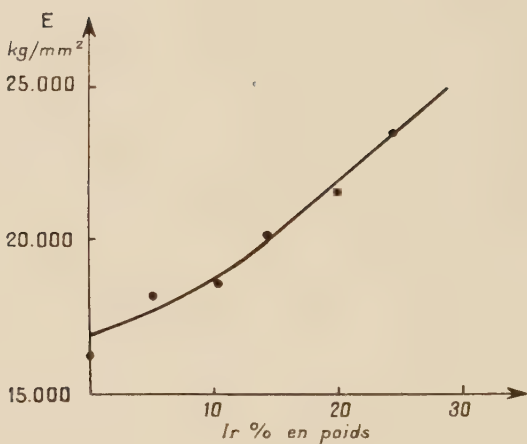


Fig. 18. — Variation du module d'élasticité des solutions solides platine-iridium en fonction de la composition.

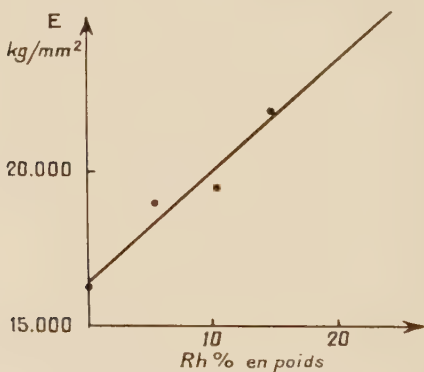


Fig. 19. — Variation du module d'élasticité des solutions solides platine-rhodium en fonction de la composition.

linéaire tout au moins à partir d'une certaine concentration.

D'après ces exemples, le module d'élasticité des solutions solides varie suivant une loi sensiblement

Tableau III.

Composition % en poids	Modules kg/mm ²	Composition % en poids	Modules kg/mm ²
0 Ir	16.300	0 Rh	16.300
5,15 —	18.150	5,5 —	19.000
10,30 —	18.650	10,4 —	19.500
14,60 —	20.150	15,0 —	21.850
20,00 —	21.575		
24,60 —	23.350		

linéaire en fonction de la composition chimique. Ceci concorde d'ailleurs avec les études de MM. Chevenard et Portevin sur les alliages argent-or et cuivre-nickel.

CHAPITRE V

MODULE D'ÉLASTICITÉ DES COMPOSÉS INTERMÉTALLIQUES

La détermination du module élastique des composés définis présente un certain nombre de difficultés dont les principales sont les suivantes :

1° Les composés métalliques sont à la fois difficilement usinables et très fragiles, aussi la préparation d'éprouvettes cylindriques par meulage à grande vitesse a-t-elle été très délicate.

2° En général, ces composés ne peuvent pas être obtenus à l'état forgé et présentent souvent des défauts de fonderie, notamment des soufflures : on contrôlé par radiographie les barreaux coulés et, en outre, on a multiplié les déterminations, craignant la présence de discontinuités. Ces discontinuités ne peuvent d'ailleurs que diminuer le module de sorte que les *valeurs trouvées ne sont éventuellement affectées d'erreur que par défaut.*

Les alliages étaient fondus très rapidement (pour éviter l'absorption de gaz) dans un petit four électrique et coulés verticalement en sable sous la forme d'éprouvettes cylindriques de 10 mm. de diamètre et de 100 mm. de long.

Certains composés ($\text{Cu}^3 \text{Al}$, $\text{Cu}^3 \text{Au}$, Cu Au) métalliques relativement malléables ont pu être laminés. Mais dans la plupart des cas, le module d'élasticité a été déterminé sur alliage coulé.

Les modules ont été déterminés par la méthode des pendules sympathiques de Le Rolland et Sorin.

Le tableau IV donne les résultats obtenus.

Divers auteurs étrangers : Bernal, Dehlinger, Goldschmidt, Hume-Rothery, etc. (11) ont classé les combinaisons mentionnées jusqu'alors parmi les alliages étudiés en leur assignant un caractère prédominant et distinguant notamment, comme nous

Tableau IV.

Composition de l'alliage en poids %	Composé défini correspondant	Valeur du module expérimental kg/mm ²	Valeur du module calculée d'après la règle des mélanges kg/mm ²	Ecart en valeur absolue	Ecart en % du module	Nature des liaisons atomiques
Cu = 84,25	Cu ⁹ Al ¹	16 850	11.750	5.100	43	homopolaire
Cu = 45,71	Cu Al ²	9.640	9.700	60	0,6	métallique
Cu = 47,22	Cu Zn	9.800	10.200	400	4	métallique
Cu = 37,00	Cu ⁵ Zn ⁸	14.800	9.700	5.100	52	homopolaire
Cu = 13,06	Cu Zn ⁶	10.600	8.600	2.000	23	—
Cu = 68,00	Cu ³¹ Sn ⁸	12.150	9.850	2.300	23	homopolaire
Cu = 62,00	Cu ³ Sn	11.400	9.350	2.050	20	—
Cu = 45,00	Cu ³ Sn ²	9.400	7.900	1.500	19	—
Gl = 12,4	Cu Cl	18.000	15.500	2 500	16	métallique
Gl = 22,1	Cu Gl ²	22 800	17.700	5.100	28	—
Au = 50,95	Cu ³ Au	11.720	10.500	1.220	16	métallique
Au = 75,55	Cu Au	10.500	9.500	1.060	10	métallique

l'avons vu au chapitre II, les composés définis métalliques de ceux homopolaires. Or, si l'on examine le tableau IV, on reconnaît que dans l'ensemble apparaissent deux catégories de composés définis :

1° Ceux dont le module suit approximativement la règle des mélanges, ce sont ceux indiqués comme étant de caractère métallique, tels que Cu Zn , $\text{Al}^2 \text{Cu}$.

2° Ceux dont le module dépasse notablement la valeur assignée par la règle des mélanges (comme les valeurs trouvées ne peuvent être erronées que par défaut, ce résultat est hors de doute). Ce sont précisément ceux indiqués comme homopolaires et dont les composés $\text{Cu}^9 \text{Al}^4$, $\text{Cu}^5 \text{Zn}^8$, $\text{Cu}^{31} \text{Sn}^8$ sont le type.

Il est intéressant de remarquer que Cu Zn et $\text{Al}^2 \text{Cu}$ ont une structure cristalline très différente de celle des métaux purs composants : le premier cristallise dans le système cubique centré, le second dans le système tétragonal (10 bis); malgré cela, leurs modules d'élasticité suivent la loi des mélanges.

A titre d'exemple, les figures 20 et 21 montrent les clichés radiographiques obtenus pour les combinaisons $\text{Cu}^9 \text{Al}^4$ et $\text{Cu}^3 \text{Sn}$. Pour ces examens, les échantillons étant cylindriques sont immergés dans une solution absorbante d'iodure de baryum dans l'eau qui possède un coefficient d'absorption analogue à celui du fer : la combinaison $\text{Cu}^3 \text{Sn}$ ayant

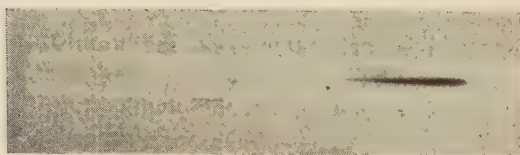


Fig. 20. — Cliché radiographique obtenu pour le composé $\text{Cu}^9 \text{Al}^4$.



Fig. 21. — Cliché radiographique obtenu pour le composé $\text{Cu}^3 \text{Sn}$.

un coefficient d'absorption supérieur apparaît sur la radiographie en blanc sur fond noir. Au contraire, la combinaison $\text{Cu}^9 \text{Al}^1$ a un coefficient d'absorption à peu près égal à celui de la solution d'immersion et apparaît en gris sur fond noir. On aperçoit très nettement une retassure axiale qui n'est d'ailleurs pas surprenante si l'on se rappelle les difficultés de fonderie bien connues des bronzes d'aluminium. On peut y remédier, comme nous l'avons fait, en coulant un jet plus important, en pied duquel on prélève l'éprouvette

CHAPITRE VI

MODULE D'ÉLASTICITÉ DES ALLIAGES FORMÉS DE DEUX CONSTITUANTS.

Connaissant les modules des métaux purs, des solutions solides et des composés définis, il ne nous reste plus qu'à étudier le module des alliages formés de deux constituants, une solution solide ou un métal pur et un composé défini par exemple.

Tableau V.

Al — Cu	
Composition % en poids	Module kg/mm ²
0 Cu	7.300
2,18	7.300
2,58	7.480
6,47	7.500
7,90	7.620
10,20	7.680
12,85	8.030

Tableau VI.

Cu — Gl	
Composition % en poids	Module kg/mm ²
0 Gl	12.600
2	12 800
4,6	14.500
10,60	17.000
16,60	20.400

Tableau VII.

Al — Mg		Mg — Al	
Composition % en poids	Modules kg/mm ²	Composition % en poids	Modules kg/mm ²
0 Mg	7.300	0 Al	4.500
2,29 »	7.240	2,10 »	4.660
4,18 »	7.280	4,58 »	4.720
5,80 »	7.300	6,88 »	4.750
8,00 »	7.200	8,00 »	4.830
10,07 »	7.150	9,28 »	4.790
11,93 »	7.120	12,15 »	4.860

C'est ce que nous avons fait d'abord pour les alliages aluminium-cuivre, aluminium-magnésium

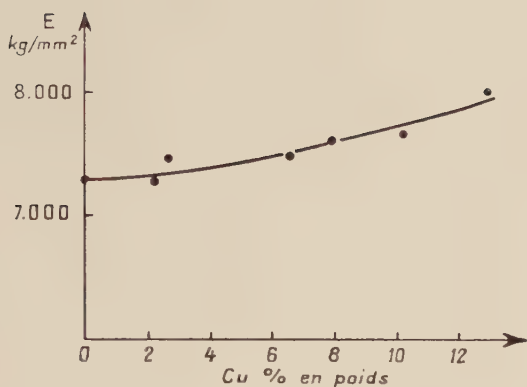


Fig. 22. — Variation du module d'élasticité des alliages aluminium-cuivre en fonction de la composition.

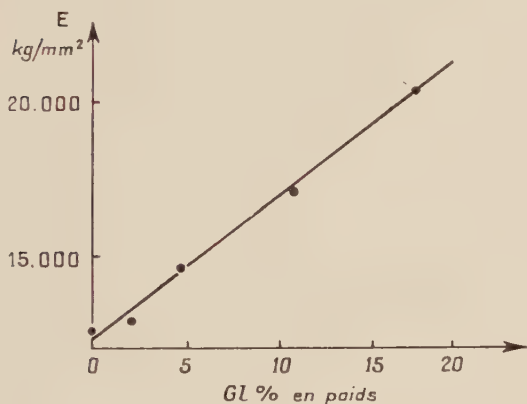


Fig. 23. — Variation du module d'élasticité des alliages cuivre-glucinium en fonction de la composition.

et cuivre-glucinium. Les tableaux V, VI et VII, ainsi que les figures 22, 23, 24 et 25 donnent les résultats obtenus.

Les alliages aluminium-cuivre et aluminium-magnésium ont été laminés et recuits à 400°. Les

premiers sont formés d'aluminium sensiblement pur et de la combinaison Al_2Cu en quantité proportionnelle à la teneur en cuivre. On voit que l'addition de cuivre à l'aluminium augmente régulièrement mais faiblement son module d'élasticité. Les seconds sont formés d'une solution solide à 3 % de magnésium environ et de la combinai-

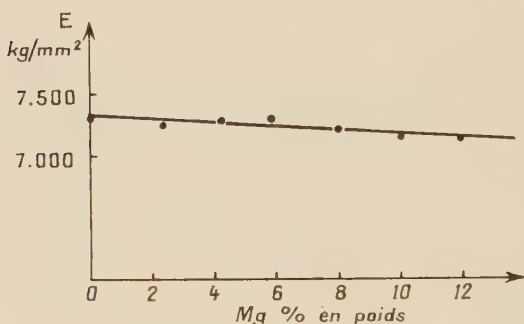


Fig. 24. — Variation du module d'élasticité des alliages aluminium-magnésium en fonction de la composition.

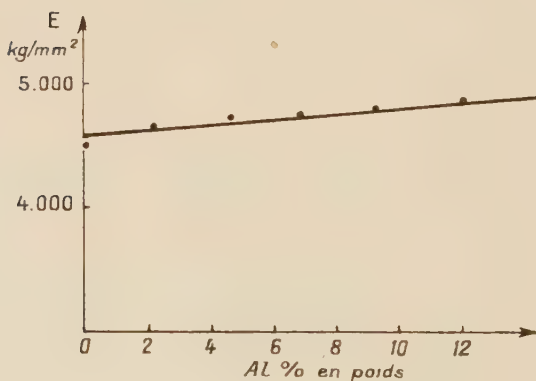


Fig. 25. — Variation du module d'élasticité des alliages magnésium-aluminium en fonction de la composition.

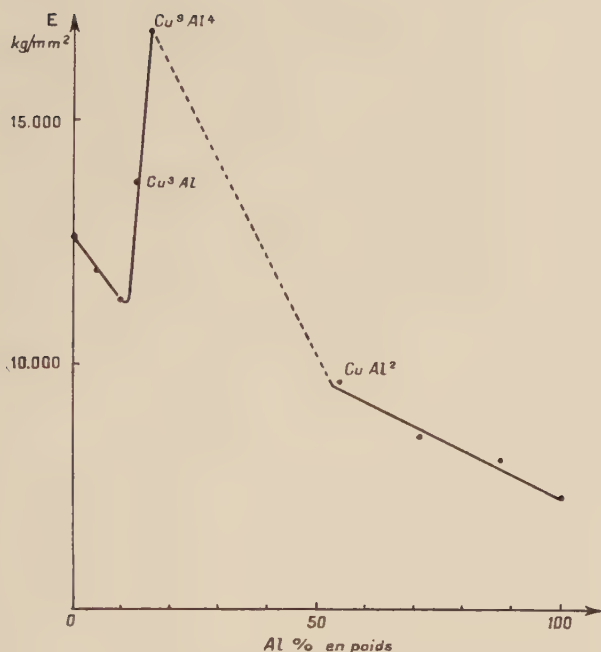


Fig. 26. — Variation du module d'élasticité des alliages cuivre-aluminium en fonction de la composition.

son $\text{Al}^3 \text{Mg}^2$ s'ils sont riches en aluminium ou d'une solution solide à 2 % d'aluminium et de la combinaison $\text{Al}^2 \text{Mg}^3$ s'ils sont riches en magnésium. On voit que leur module d'élasticité varie très peu en fonction de leur composition chimique, ce qui s'explique par le fait que les deux métaux composants ont des modules très voisins.

Les alliages cuivre-glucinium ont été coulés et recuits 8 heures à 800° . Ils sont constitués :

1° de 0 à 11 % de glucinium, de deux constituants α et γ , α solution solide de glucinium dans le cuivre, et γ composé défini Cu Gl.

2° de 11 à 12 % de glucinium, d'un seul constituant γ .

On voit que l'addition de glucinium au cuivre augmente très sensiblement son module d'élasticité puisque un alliage à 16 % de glucinium a un module égal à celui de l'acier.

Le tableau VIII reproduit également les analyses chimiques et les modules des alliages cuivre-aluminium, cuivre-zinc et cuivre-étain formés de deux constituants et les figures 26, 27 et 28 donnent les lois de variations du module d'élasticité dans toute l'étendue des compositions de ces alliages. Les différents domaines de composition dans lesquels ces alliages sont formés de deux constituants

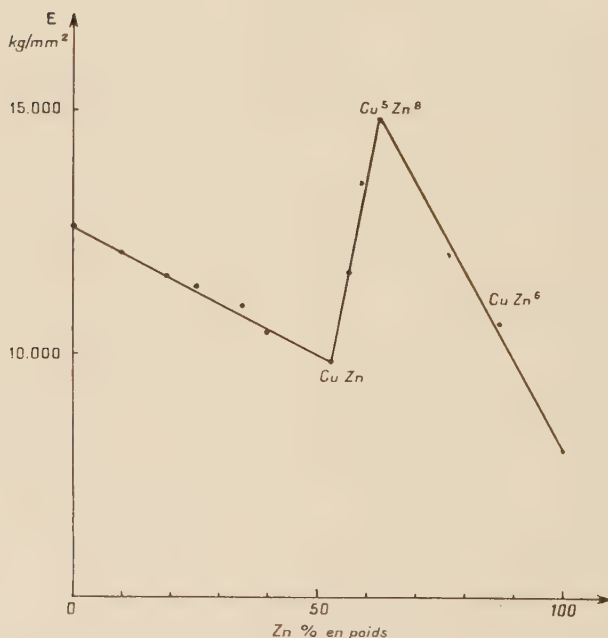


Fig. 27. — Variation du module d'élasticité des alliages cuivre-zinc en fonction de la composition.

Tableau VIII

Cu-Al		Cu-Zn		Cu-Sn	
Composition % de l'alliage en poids	Module en kg/mm ²	Composition % de l'alliage en poids	Module en kg/mm ²	Composition % de l'alliage en poids	Module en kg/mm ²
Cu = 99,99	12.600	Cu = 99,99	12.600	Cu = 99,99	12.600
Cu = 95,28	11.920	Cu = 80,74	11.600	Cu = 93,85	11.620
Cu = 90,13	11.250	Cu = 60,17	10.425	Cu = 87,00	10.300
Cu = 87,00	13.300	Cu = 58,14	10.050	Cu = 74,66	11.400
Cu = 84,25	16.850	Cu = 47,22	9.800	Cu = 67,97	12.150
Cu = 45,71	9.640	Cu = 43,57	11.650	Cu = 84,54	11.700
Cu = 29,35	8.550	Cu = 40,87	13.500	Cu = 41,17	8.800
Cu = 7,90	7.800	Cu = 37,00	14.800	Cu = 24,62	6.900
Cu = 0	7.300	Cu = 23,86	12.000	Cu = 0	4.000
		Cu = 13,05	10.600		
		Cu = 0	8.000		

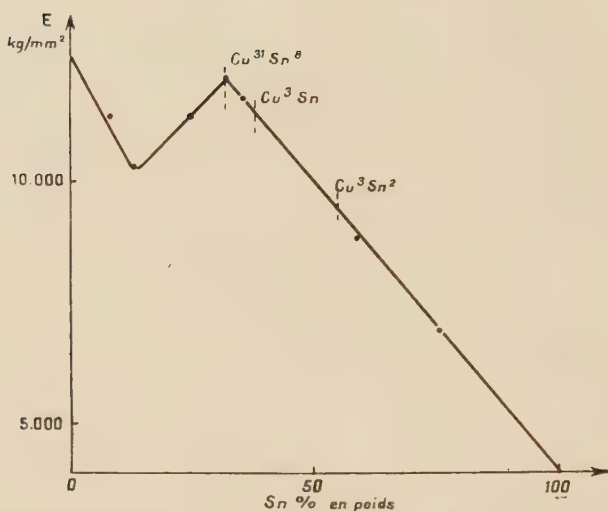


Fig. 28. — Variation du module d'élasticité des alliages cuivre-étain en fonction de la composition.

sont bien connus (12, 13 et 14) et nous ne les indiquerons pas ici. On voit qu'à l'intérieur d'un domaine à deux constituants, le module d'élasticité varie suivant une loi sensiblement linéaire en fonction de la composition chimique, quelle que soit la nature de ces deux constituants.

CHAPITRE VII

INFLUENCE DES TRAITEMENTS THERMIQUES SUR LE MODULE D'ÉLASTICITÉ.

L'influence des traitements thermiques sur le module d'élasticité des alliages métalliques a été peu étudiée. Il résulte des quelques résultats dispersés obtenus sur les alliages industriels que le module d'élasticité varie peu sous l'influence des traitements thermiques.

Nous avons repris cette étude sur quelques alliages de cuivre d'une façon plus systématique et plus complète.

Les alliages dont les compositions correspondent aux composés intermétalliques (surtout aux composés homopolaires) ont tendance à donner des tapures de trempe en raison de leur mauvaise conductibilité. Pour éliminer l'influence des microtapures sur le module d'élasticité, tous les essais ont été faits pour un même alliage *sur la même éprouvette*. Cette éprouvette était protégée pendant le chauffage contre l'oxydation par une feuille de cuivre.

Alliages cuivre-aluminium.

On sait que les alliages dont la teneur en aluminium est comprise entre 9 % et 16 % subissent une transformation eutectoïde à 569° et sont formés après trempe d'un constituant hors d'équilibre dont les caractères micrographiques sont bien connus et qui confèrent à ces alliages un durcissement très élevé. Lorsqu'ils sont, au contraire, refroidis lentement, ils sont formés de deux constituants : solution solide α et composé δ (Cu^2Al), dont le module d'élasticité est très élevé comme nous l'avons vu.

De plus, d'après Broniewski, Jelnicki et Skwara (13) le composé $\text{Cu}^2 \text{Al}$ (ce composé est très voisin de $\text{Cu}^9 \text{Al}^1$ admis par Hume Rothery) subit une transformation allotropique à 870° .

Nous avons étudié l'influence de la trempe sur le module d'élasticité de ces alliages.

Les alliages à 9,87 % et à 13 % d'aluminium avaient pu être laminés. Ils étaient trempés à l'eau

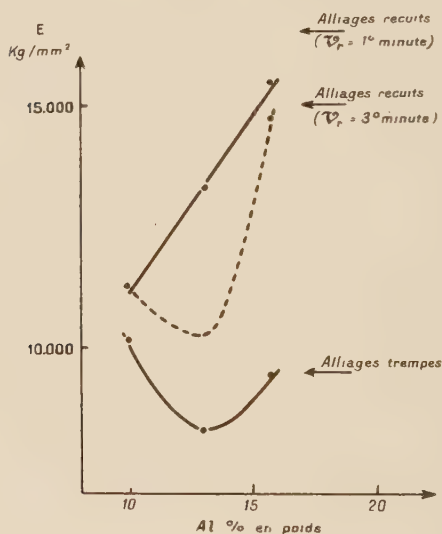


Fig. 29. — Influence des traitements thermiques sur le module d'élasticité des alliages cuivre-aluminium.

à 900° , recuits à 900° pendant deux heures et refroidis à partir de cette température avec une vitesse de 1° par minute. Cette faible vitesse de refroidissement après recuit est nécessaire pour atteindre l'équilibre physico-chimique. Une vitesse de refroidissement de 3° par minute n'est pas assez faible et correspond à des alliages partiellement recuits.

L'alliage à 15,75 % d'aluminium (correspondant au composé $\text{Cu}^9 \text{Al}^4$) n'avait pu être laminé en raison de sa grande fragilité. Il était trempé à l'eau à 950° et recuit dans les mêmes conditions que les précédents.

Le tableau IX et la figure 29 montrent les résultats obtenus.

Tableau IX

Aluminium % en poids	Module d'élasticité Kg/mm ²		
	trempe	recuit ($V_r = 3^\circ \text{min.}$)	recuit ($V_r = 1^\circ \text{min.}$)
9,87	10.150	11.250	11.250
13,00	8.300	10.300	13.300
15,75 ($\text{Cu}^9 \text{Al}^4$)	9.400	14.700	15.450

On voit que le module d'élasticité diminue sensiblement par trempe. L'effet est maximum pour l'alliage à 13 % d'aluminium qui correspond au point eutectoïde. Le recuit ramène le module à sa valeur initiale à condition que la vitesse de refroidissement après recuit soit suffisamment lente (1° par minute). Pour une vitesse de refroidissement de 3° par minute, le module d'élasticité de l'alliage à 13 % d'aluminium dont la vitesse critique de trempe est minimum est encore très loin d'avoir recouvré sa valeur initiale.

Puisque tous ces traitements thermiques ont été faits pour un même alliage sur une éprouvette unique, on ne peut invoquer les microtapures provoquées par la trempe pour expliquer la diminution du module : ces microtapures subsisteraient après recuit et le module ne reviendrait pas à sa valeur initiale. Cependant, le module ne revient pas tout à fait à sa valeur initiale (15.450 au lieu de 16.850) et ce fait est peut-être dû à la présence de microtapures.

Il en résulte que les alliages moulés en sable ont un module plus élevé que les alliages moulés en coquille.

Alliages cuivre-zinc.

Divers auteurs (13) signalent une transformation du composé intermétallique Cu Zn à 470° . Cette transformation s'effectue à l'intérieur de la maille. La forme stable à froid correspond à une distribution régulière des atomes (les atomes de cuivre sont situés aux sommets du cube et l'atome de zinc au centre) alors que la forme stable à chaud correspond à une distribution statistique des atomes. L'alliage correspondant a été trempé à 700° à l'eau et ce traitement n'a eu aucune influence sur son module d'élasticité comme le montrent les chiffres suivants :

— recuit	9.600 kg/mm ²
— trempé à l'eau à 700°	9.600 kg/mm ²

Alliages cuivre-étain.

On sait que les alliages cuivre-étain dont la teneur en étain est comprise entre 13 % et 32 % subissent à la température de 525° une transformation eutectoïde, et qu'une trempe effectuée au-dessus de cette température préserve le constituant stable à haute température de cette transformation. Les alliages refroidis lentement sont formés de deux constituants : solution solide α et composé défini Cu^4Sn très dur et à haut module d'élasticité comme nous l'avons vu.

De plus, Broniewski, Jablonski et Maj (15) signalent une transformation allotropique du composé Cu^4Sn (très voisin de $\text{Cu}^{31}\text{Sn}^8$ admis par Hume Rothery) à 585° .

Nous avons étudié l'influence de la trempe sur le module d'élasticité de ces alliages. Les alliages à 22 %, 25,34 % et 32,03 % Sn (ce dernier correspondant au composé $\text{Cu}^{31}\text{Sn}^8$) ont été trempés à 650° à l'eau, recuits deux heures à la même tempé-

raiture et refroidis à partir de cette température à une vitesse de 4° à 5° par minute. A l'encontre des alliages cuivre-aluminium, cette vitesse semble assez faible pour ramener le module d'élasticité à sa valeur initiale.

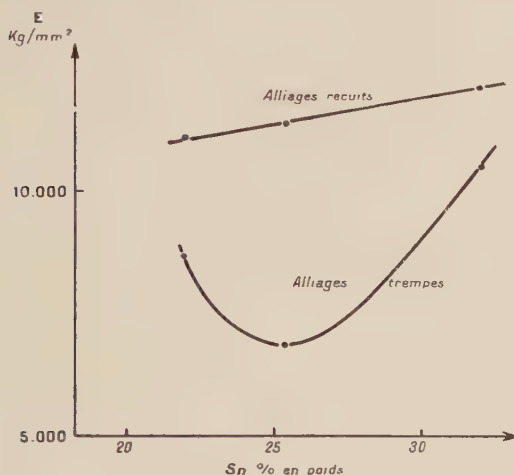


Fig. 30. — Influence des traitements thermiques sur le module d'élasticité des alliages cuivre-étain.

Le tableau X et la figure 30 montrent les résultats obtenus :

Tableau X.

Etain % en poids	Modules d'élasticité en kg/mm ²	
	Trempé	Recuit
22,00	8.670	11.100
25,34	6.820	11.400
32,03 (Cu ³¹ Sn ⁸)	10.560	12.150

On voit que le module d'élasticité diminue sensiblement par trempé. Comme pour les alliages

cuivre-aluminium, l'effet est maximum pour l'alliage à 25,34 % d'étain qui correspond sensiblement au point eutectoïde. Le recuit à 650° ramène le module à sa valeur initiale.

Les alliages moulés en sable auront donc un module d'élasticité plus élevé que les alliages moulés en coquille. On sait que la dureté subit des variations dans le même sens.

Krupp avait déjà signalé dans son livre *Die Legierungen* (Vienne, 1894, p. 144) que les pièces en bronze brusquement refroidies ont un ton plus grave, particularité qu'on ne doit pas perdre de vue dans la fabrication des cloches. Or, on sait que la hauteur du son rendu par un solide dépend de la vitesse de propagation du son dans ce solide et que cette vitesse croît comme la racine carrée du module d'élasticité.

Alliage cuivre-or.

Dans les solutions solides primaires or-cuivre avec distribution statistique des deux sortes d'atomes dans le réseau cubique à faces centrées, peuvent se former, par recuit avec refroidissement suffisamment lent, deux distributions régulières des atomes (16) : dans l'une, les atomes d'or occupent les sommets et les atomes de cuivre le centre des faces de la maille correspondant au composé défini Au Cu^3 ; dans l'autre, il y a formation d'un réseau quadratique ou tétragonal à faces centrées où les atomes d'or occupent les sommets et deux des centres des faces, correspondant à Au Cu . Les températures de formation de ces composés sont respectivement de 395° et 423°C. Si l'on trempe à l'eau les alliages préalablement chauffés à 650°, on obtient au contraire des solutions solides ordinaires avec distribution statistique des deux sortes d'atomes.

Pour obtenir ces composés définis, nous avons recuit les alliages laminés pendant 20 minutes à 700°. L'alliage à 50,95 % d'or a été soumis à un

recuit supplémentaire d'homogénéisation à 850° pendant 12 heures. Après refroidissement lent (30° heure) jusqu'à la température ordinaire, nous les avons réchauffés à 380° (c'est-à-dire à 20° au-dessous de la température de transformation) pendant 60 heures. Nous avons vérifié l'efficacité de ce traitement par des mesures de dureté et de résistivité électrique qui sont résumées dans le tableau XI. Les duretés Brinell ont été déterminées avec une bille de 1,98 mm. de diamètre soumise à une charge de 20 kg. et les résistivités électriques ont été mesurées sur éprouvettes cylindriques de 5 mm. 64 de diamètre au moyen de l'ohmmètre Cain, appareil qui donne la différence de potentiel entre deux points de contact déterminés et l'intensité du courant passant dans l'éprouvette. On voit que le module d'élasticité est peu sensible à ce traitement thermique, alors que la dureté et la conductibilité électrique subissent des variations importantes.

Alliages cuivre-glucinium.

D'après le diagramme d'équilibre tracé par Masing (11) la solubilité du glucinium dans le cuivre à l'état solide varie de 0,5 % environ, à la température ordinaire à 2,5 % environ à 875° . On sait que ces alliages sont très sensibles au phénomène de « vieillissement » et que par trempe à 800° suivie d'un revenu à 350° , ils acquièrent des propriétés remarquables.

Nous avons étudié l'influence de ce traitement thermique sur le module d'élasticité. Un alliage à 2,5 % de glucinium, laminé et recuit, a été trempé à l'eau à 800° et revenu après trempe trois heures à 320° et refroidi dans le four. On a vérifié l'efficacité de ce traitement par des mesures de dureté faites avec une bille de $1/16^{\circ}$ de pouce soumise à une charge de 100 kg. et une pointe de diamant soumise à une charge de 150 kg. Le tableau XII donne les chiffres obtenus :

Tableau XI.

Composé	Teneur en Au en poids	Dureté Brinell		Résistivité m ω /cm ² /cm		Modules kg/mm ²		Modules kg/mm ² calculés d'après la règle des mélanges	Ecart en %	
		trempé	recuit	trempé à 650°	recuit	trempé à 650°	recuit		trempé	recuit
Cu ³ Au	50,95 %	92	108	11,5	8,4	11.500	12.200	11.500	10	16
Cu Au	75,55 %	133	180	14	5,8	9.950	10.560	9.500	4,5	10

Tableau XII

Dureté Brinell		Modules d'élasticité kg/mm ²	
Trempé	Revenu	Trempé	Revenu
120	360	12.600	13.570

Tableau XIII

Dureté Brinell		Module d'élasticité kg/mm ²	
Trempé	Vieilli *	Trempé	Vieilli
25	40	7.500	7.600

On voit que ce traitement thermique n'a qu'une faible influence sur le module d'élasticité (augmentation de 6 %) plus faible que celle trouvée par Masing et Carl Haase (17) (augmentation de 12 %).

Alliages aluminium-glucinium.

Matignon et Calvet (18) ont montré que les alliages aluminium-glucinium à faible teneur en glucinium (0,83 % à 1,23 %) subissaient après trempe à 630° dans l'eau froide un vieillissement très rapide (terminé au bout de 1 heure) à la température ordinaire accompagné d'une augmentation de la limite élastique, de la dureté et de la résistance.

Nous avons étudié l'influence de ce traitement thermique sur le module d'élasticité d'un alliage laminé à froid à 0,83 de glucinium aimablement mis à notre disposition par MM. Matignon et Calvet. On a vérifié l'efficacité de ce traitement par des mesures de dureté faite avec une bille de 2 mm. 5 de diamètre pour une charge de 15 kg. et une durée d'application de la charge de 30 secondes.

Le tableau XIII donne les chiffres obtenus.

On voit que ce traitement n'a pas d'influence sur le module d'élasticité.

CONCLUSIONS GÉNÉRALES.

Nous avons étudié, à l'aide de l'appareil Le Rolland-Sorin, les lois de variation du module d'élasticité de quelques alliages métalliques en fonction de la composition chimique et à température ambiante. Les principales conclusions de cette étude sont les suivantes :

1° Dans les métaux purs, le module d'élasticité semble être lié au volume atomique; il faut rechercher les hauts modules parmi les éléments qui ont un volume atomique faible et une température de fusion élevée.

2° Dans les solutions solides situées au voisinage des métaux purs, le module d'élasticité varie suivant une loi sensiblement linéaire en fonction de la composition chimique.

3° Dans les composés définis intermétalliques, on peut distinguer deux groupes principaux :

a) ceux dont le module d'élasticité suit approximativement la loi des mélanges; ce sont ceux indiqués comme étant de caractère métallique;

b) ceux dont le module d'élasticité est bien supérieur à la valeur indiquée par la règle des mélanges; ce sont les composés homopolaires dans lesquels les liaisons entre atomes sont particulièrement rigides.

4° Dans les alliages formés de deux constituants, le module d'élasticité varie suivant une loi sensiblement linéaire en fonction de la composition chimique, quelle que soit la nature de ces deux constituants.

Il est donc difficile d'élever notablement le module d'élasticité d'un métal par des éléments d'alliages, même si les éléments ajoutés ont des modules très élevés. Inversement, les impuretés contenues dans un métal ont une influence négligeable sur son module d'élasticité si elles

sont en faible quantité. C'est ce qu'ont confirmé des mesures de module sur le cuivre électrolytique, l'aluminium bi-raffiné, le magnésium sublimé, etc...

Pour échapper à la loi linéaire, il faut s'adresser aux composés définis intermétalliques homopolaires dans lesquels les liaisons entre atomes n'ont pas le même caractère que dans les métaux : malheureusement, les propriétés mécaniques et notamment la fragilité de ces composés empêchent pour le moment de mettre à profit leur haut module d'élasticité.

5° La trempe abaisse notablement le module des composés homopolaires qui subissent des transformations allotropiques à haute température, ainsi que celui des alliages dont les compositions sont voisines de celles qui correspondent à ces composés. Cette diminution peut atteindre 40 % de la valeur initiale. Un recuit ramène le module à sa valeur initiale.

BIBLIOGRAPHIE

- 1) BOUASSE : **Traité de la résistance des matériaux.** — Delagrave, éditeur
- 2) DE FLEURY : **Le rôle du module d'élasticité dans la construction mécanique moderne.** — Revue de Métallurgie 19-1922, p. 298-302.
- 3) Thadée PECZALSKI : **Relation entre le module de Young et le rapport de la densité à la masse atomique.** — Comptes Rendus, 176, 1923, p. 500.
- 4) A. PORTEVIN : **Remarques à propos de la relation entre le module de Young et le volume atomique.** — Comptes Rendus, 177, 1923, p. 634.
- 5) LE ROLLAND et SORIN : **Sur une nouvelle méthode de mesure du module d'élasticité.** — Comptes Rendus, 176, 1933, p. 536, et Publication Scientifique du Ministère de l'Air, n° 47, 1934.

- 5 bis) K. H. GROSSMANN : **L'appareil Le Rolland et Sorin pour la mesure du module d'élasticité.** — Schweizerische Bauzeitung, 18-1935, p. 201-205.
- 6) CHÉVENARD et PORTEVIN : **Propriétés élastiques des alliages. Variation en fonction de la composition chimique.** — Comptes Rendus, 181, 1925, p. 780.
- 7) Zenji NISHIYAMA : **Mesures du module, de la constante du réseau et de la densité des solutions solides binaires.** — Sc. Rep. of Univ. Tohoku, série I, 18, 1929.
- 8) FRILEY : Revue de Métallurgie, 11, 1914, p. 457.
- 9) Léon GUILLET Fils : **Sur le module d'élasticité des alliages cuivre-glucinium.** — C. R., CCI, 1935, p. 960.
- 10) PORTEVIN et Léon GUILLET Fils : **Module élastique de certains composés définis intermétalliques.** — Comptes Rendus, 203, 1936, p. 237.
- 10 bis) MOTT : Proc. Phys. Soc., 49, 1937, p. 258.
- 11) PORTEVIN : **Constitution et structure des alliages.** — Bull. Soc. Chim., 8^e série, 3, 1936, p. 1189.
- 12) MASING : Zeits. für Metallkunde, 20, 1928, p. 21.
- 13) BRONIEWSKI, JELNICKI et SKAWARA : Comptes Rendus, 207, 1938, p. 233.
- 14) BRONIEWSKI, JABLONSKI et MAJ : Comptes Rendus, 202, 1936, p. 411.
- 15) BRONIEWSKI, JABLONSKI et MAJ : Comptes Rendus, 202, 1936, p. 305.
- 16) HAUGHTON et PAYNE : J. Inst. Met., 46, 1931, p. 457.
- 17) MASING et Carl HAASE : Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens Konzern, p. 142.
- 18) MATIGNON et CALVET : Comptes Rendus, 196, 1933, p. 1256.
-

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté :

LES CRISTAUX UNIQUES EN MÉTALLURGIE ; LEUR PRODUCTION ET LEUR UTILISATION DANS L'ÉTUDE DES DÉFORMATIONS

Vu et approuvé :

Paris, le 17 Août 1939

Le doyen de la Faculté des Sciences,

Ch. MAURAIN

Vu

et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie

de Paris,

G. ROUSSY

